

IV.5 Elementární funkce – logaritmus a exponenciála

Věta 23 (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji \log a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

- (L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$;
- (L2) funkce \log je na $(0, +\infty)$ rostoucí;
- (L3) $\forall x, y \in (0, +\infty): \log xy = \log x + \log y$;
- (L4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Poznámka. Vlastnost L2 je důsledkem vlastností L1, L3 a L4. Přesvědčíme se o tom později.

Věta 24 (další vlastnosti logaritmu). *Dále platí*

- (L5) $\log 1 = 0$;
- (L6) $\forall x \in (0, +\infty) : \log 1/x = -\log x$;
- (L7) $\forall x \in (0, +\infty) \forall n \in \mathbf{Z} : \log x^n = n \log x$;
- (L8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$;
- (L9) $\log' x = \frac{1}{x}$ pro každé $x \in (0, +\infty)$;
- (L10) \log je spojitá na $(0, +\infty)$;
- (L11) $H_{\log} = \mathbf{R}$;
- (L12) existuje právě jedno číslo $e \in (0, +\infty)$ splňující $\log e = 1$.

Definice. Exponenciální funkcí nazýváme funkci inverzní k funkci \log . Značíme ji \exp .

Věta 25 (vlastnosti exponenciální funkce).

- (E1) $D_{\exp} = \mathbf{R}, H_{\exp} = (0, +\infty)$;
- (E2) funkce \exp je spojitá a rostoucí na \mathbf{R} ;
- (E3) $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$;
- (E4) $\forall x, y \in \mathbf{R} : \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$;
- (E5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$;
- (E6) $\exp' x = \exp x$ pro každé $x \in \mathbf{R}$;
- (E7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Definice.

- Nechť $a \in (0, +\infty), b \in \mathbf{R}$. **Obecnou mocninou** a^b rozumíme číslo $a^b = \exp(b \log a)$.
- Nechť $a, b \in (0, +\infty), a \neq 1$. **Obecným logaritmem** $\log_a b$ rozumíme číslo $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

Větička 26. *Platí:*

- $\forall a, b \in (0, +\infty), a \neq 1: a^{\log_a b} = b$;
- $\forall a \in (0, +\infty), a \neq 1 \forall b \in \mathbf{R}: \log_a a^b = b$;
- $\forall a \in (0, +\infty) \forall b, c \in \mathbf{R}: a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{bc}$;
- $\forall a \in (0, +\infty): a^{-1} = 1/a \ \& \ \forall n \in \mathbf{N}: a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ krát}}$
- $\forall a, b, c \in (0, +\infty), a \neq 1: \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.