

IV.6 Elementární funkce goniometrické a cyklometrické funkce

Definice. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je

- (a) **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$;
- (b) **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$;
- (c) **periodická s periodou** $P > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + P \in D_f$, $x - P \in D_f$ a $f(x + P) = f(x - P) = f(x)$.

Věta 27 (zavedení funkce sinus a čísla π). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce **sinus** (budeme ji značit \sin), které mají následující vlastnosti:*

- (S1) $D_{\sin} = \mathbf{R}$,
- (S2) \sin je rostoucí na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
- (S3) $\sin 0 = 0$,
- (S4) $\forall x, y \in \mathbf{R} : \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,
- (S5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta 28 (další vlastnosti sinu). *Dále platí:*

- (S6) $\sin(\pi/2) = 1, \sin \pi = 0, \sin(-\pi/2) = -1$,
- (S7) $\forall x \in \mathbf{R} : \sin^2 x + \sin^2(\pi/2 - x) = 1$,
- (S8) $\forall x \in \mathbf{R} : |\sin x| \leq 1$,
- (S9) *funkce $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ je sudá,*
- (S10) $\forall x \in \mathbf{R} : \sin(x + \pi) = -\sin x$,
- (S11) *funkce \sin je lichá,*
- (S12) *funkce \sin je periodická s periodou 2π ,*
- (S13) *funkce \sin je spojitá na \mathbf{R} ,*
- (S14) $\forall x \in \mathbf{R} : \sin' x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Definice. Dále definujeme:

- funkci **kosinus** (značíme \cos) předpisem $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$;
- funkci **tangens** (značíme tg) předpisem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;
- funkci **kotangens** (značíme cotg) předpisem $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Větička 29.

- (i) $D_{\cos} = \mathbf{R}$, funkce \cos je spojitá na \mathbf{R} , je sudá a periodická s periodou 2π , na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ je klesající, $\cos' x = -\sin x$ pro $x \in \mathbf{R}$.
- (ii) $D_{\text{tg}} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá a periodická s periodou π , na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je rostoucí, v bodě $-\frac{\pi}{2}$ zprava má limitu $-\infty$, v bodě $\frac{\pi}{2}$ zleva limitu $+\infty$, $\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$;
- (iii) $D_{\text{cotg}} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá a periodická s periodou π , na intervalu $(0, \pi)$ je klesající, v bodě 0 zprava má limitu $+\infty$, v bodě π zleva limitu $-\infty$, $\text{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$.

Definice.

- (1) Funkcí **arkussinus** (značíme \arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$.
- (2) Funkcí **arkuskosinus** (značíme \arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$.
- (3) Funkcí **arkustangens** (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\text{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- (4) Funkcí **arkuskotangens** (značíme arccotg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\text{cotg}|_{(0, \pi)}$.

Větička 30.

- (1) $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbf{R}$. Funkce \arcsin a arctg jsou liché.
- (2) Funkce \arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce \arccos a arccotg klesající (na svých definičních oborech).
- (3) Funkce \arcsin , \arccos , arctg a arccotg jsou spojitě na svých definičních oborech.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg} x}{x} = 1$.
- (5) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$;
 $\text{arctg} x + \text{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;
- (7) $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
 $\text{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ a $\text{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbf{R}$.