# IV.8 Konvexní a konkávní funkce

**Poznámka.** Nechť $x_1 < x_2$ a $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Pak bod

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1)$$

patří do intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$. Pokud $\lambda \in (0,1)$, pak onen bod patří do $(x_1, x_2)$. A obráceně, pro každé $z \in \langle x_1, x_2\rangle$ existuje právě jedno $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, pro které platí $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

**Definice.** Řekneme, že funkce $f$ je na intervalu $I$

- **konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$.
- **konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$.
- **ryze konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$.
- **ryze konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$.

**Poznámka.** Funkce $f$ je (ryze) konkávní na intervalu $I$, právě když funkce $-f$ je (ryze) konvexní na $I$.

**Větička 37.** *Nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $I$. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Funkce $f$ je na $I$ konvexní.*

(ii) *Pro každou trojici bodů $x_1, x_2, x_3 \in I$ takovou, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$.

(iii) *Pro každou trojici bodů $x_1, x_2, x_3 \in I$ takovou, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

**Poznámka.** Analogické charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

**Věta 38.** *Nechť $f$ má v každém bodě otevřeného intervalu $I$ vlastní derivaci. Pak funkce $f$ je konvexní, právě když je funkce $f'$ neklesající na $I$. Funkce $f$ je ryze konvexní na $I$, právě když funkce $f'$ je rostoucí na $I$.*

**Poznámka.** Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

**Definice.** **Druhou derivací** funkce $f$ v bodě $a$ rozumíme

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

jestliže tato limita existuje. Druhá derivace funkce $f$ je tedy derivace její derivace. Obdobně definujeme derivace vyšších řádů, $n$-**tou derivaci** funkce $f$ v bodě $a$ značíme $f^{(n)}(a)$. Je přitom

$$f^{(1)}(a) = f'(a), \qquad f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a) \text{ pro } n \in \mathbf{N}.$$

**Věta 39.** *Nechť $f$ má v každém bodě otevřeného intervalu $I$ vlastní druhou derivaci. Pak platí:*

(i) *Funkce $f$ je konvexní na intervalu $I$, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$.*
(ii) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, je $f$ ryze konvexní na $I$.*

**Poznámka.** Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

**Definice.** Nechť $f$ má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$ a $T_a$ označuje tečnu ke grafu funkce $f$ v bodě $(a, f(a))$. Řekneme, že **bod** $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** $T_a$, jestliže $f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že **bod** $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** $T_a$.

**Definice.** Nechť $f$ má v bodě $a$ vlastní derivaci. Řekneme, že $a$ je **inflexním bodem funkce** $f$, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou.

**Věta 40** (nutná podmínka pro inflexní bod). *Nechť $f''(a)$ existuje a je různá od 0. Potom $a$ není inflexním bodem funkce $f$.*

**Věta 41** (postačující podmínka pro inflexní bod). *Nechť funkce $f$ má spojitou první derivaci na intervalu $(a, b)$ a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

$$\forall x \in (a, z): \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z, b): \ f''(x) < 0.$$

*Potom $z$ je inflexním bodem funkce $f$.*