

## V.2 Parciální derivace

**Definice.** Funkcí  $n$  proměnných rozumíme zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ , kde  $M \subset \mathbf{R}^n$ .

**Definice.** Necht  $f$  je funkce  $n$  proměnných,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ . Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + te^j) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce  $f$  podle  $j$ -té proměnné v bodě  $\mathbf{a}$ .**

**Poznámky.** (1) Symbol  $x_j$  v zápise  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  označuje  $j$ -tou proměnnou; proto místo něj používáme označení  $j$ -té proměnné podle kontextu – takže píšeme například  $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , někdy též  $\partial_j f$ .

(2) Označíme-li  $\varphi(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$ , pak  $\varphi$  je funkce jedné proměnné a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \varphi'(a_j),$$

je-li alespoň jeden z uvedených výrazů definován.

**Definice.** Necht  $M \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in M$  a  $f$  je funkce definovaná alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset D_f$ ). Řekneme, že  $f$  má v bodě  $\mathbf{x}$

- **maximum na  $M$** , jestliže platí  $\forall \mathbf{y} \in M : f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ ,
- **lokální maximum vzhledem k  $M$** , jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap M : f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ ,

Analogicky se definuje **minimum na  $M$**  a **lokální minimum vzhledem k  $M$** .

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  **lokální maximum**, má-li v  $\mathbf{x}$  lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu  $\mathbf{x}$ . Podobně pro lokální minimum.

**Věta 6** (nutná podmínka pro lokální extrém). Necht  $M \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{a} \in \text{Int } M$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  a funkce  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  má v bodě  $\mathbf{a}$  lokální extrém (vzhledem k  $M$ ). Pak  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$  neexistuje nebo je nulová.