I.2 Matematické věty a základní metody důkazů

- Matematická věta má často formu implikace *„Jestliže platí ..., pak platí také ... “*.
- **Přímý důkaz** implikace $A \Rightarrow B$ spočívá v nalezení vhodných tvrzení $C_1, \dots, C_n$ takových, že platí implikace

$$A \Rightarrow C_1, C_1 \Rightarrow C_2, \dots, C_n \Rightarrow B.$$

  Přitom platnost těchto implikací může plynout buď z dříve dokázaných vět, nebo může být zřejmá či snadná. (Problémem je ovšem nalezení oněch vhodných tvrzení.) Ilustrací přímého důkazu bude Věta 1 níže.
- **Nepřímý důkaz** implikace $A \Rightarrow B$ je přímý důkaz její obměny, tedy implikace $non(B) \Rightarrow non(A)$. Ilustraci nyní neuvádíme, ale metodu budeme používat.

Věta 1 (Cauchyova nerovnost). *Nechť n je přirozené číslo, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ reálná čísla. Pak platí*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

- **Důkaz sporem** znamená, že z předpokladu negace dokazovaného tvrzení odvodíme spor. Chceme-li dokázat sporem tvrzení A, znamená to dokázat implikaci

$$non(A) \Rightarrow \text{spor}, \quad \text{neboli } non(A) \Rightarrow (C \,\&\, non(C)) \text{ pro nějaký výrok } C.$$

  Speciálně, dokázat sporem implikaci $A \Rightarrow B$ znamená dokázat implikaci

$$(A \,\&\, non(B)) \Rightarrow \text{spor}.$$

  Sporem se dokazuje například Věta 2.

Věta 2 (iracionalita $\sqrt{2}$). *Je-li y reálné číslo splňující $y^2 = 2$, pak y není racionální.*

- Speciální metodou důkazu je **matematická indukce**. Dokazují se jí tvrzení tvaru $\forall n \in \mathbf{N} : V(n)$, kde V je výroková forma závisející na přirozených číslech. Důkaz se dělá ve dvou krocích.

  Krok 1: Dokážeme $V(1)$.
  Krok 2: Dokážeme $\forall n \in \mathbf{N} : V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

  Matematickou indukcí lze dokázat například Větu 3.

Věta 3 (AG nerovnost). *Nechť n je přirozené číslo a $a_1, \dots, a_n$ nezáporná reálná čísla. Pak platí*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- Chceme-li dokázat rovnost $M = N$, kde M a N jsou dvě množiny, musíme dokázat obě inkluze $M \subset N$ a $N \subset M$.
- Dokázat inkluzi $M \subset N$ znamená dokázat: $\forall x \in M : x \in N$ (jinak zapsáno $\forall x : x \in M \Rightarrow x \in N$).
- Ilustrací tohoto postupu je důkaz Věty 4.

Věta 4 (de Morganovy vzorce). *Nechť I je neprázdná množina, S množina a A_i, $i \in I$ jsou množiny. Pak platí*

$$S \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (S \setminus A_i) \qquad \text{a} \qquad S \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (S \setminus A_i).$$

Poznámka. Čtyři věty použité jako ilustrace metod důkazů nebyly vybrány samoúčelně, budeme je později využívat.