II.1 Pojem posloupnosti

Definice. Je-li každému přirozenému číslu n přiřazeno reálné číslo a_n, říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost reálných čísel**. Číslo a_n nazýváme n-**tým členem posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Místo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ píšeme často jen $\{a_n\}$.

Definice. **Množinou členů posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbf{R};\ \exists n \in \mathbf{N}\colon a_n = x\}.$$

Příklady.

(1) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost* $1, 2, 3, 4, \ldots$ *Množina jejích členů je* $\mathbf{N}$.
(2) $\{7\}_{n=1}^{\infty}$ *je konstatní posloupnost* $7, 7, 7, 7, \ldots$ *Množina jejích členů je* $\{7\}$.
(3) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost* $-1, 1, -1, 1, \ldots$ *Množina jejích členů je* $\{-1, 1\}$.
(4) *Nechť* p_n *označuje* n*-té prvočíslo. Pak* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost začínající* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, \ldots$ *Množina jejích členů je množina všech prvočísel.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **shora omezená**, je-li množina jejích členů shora omezená. Analogicky definujeme **zdola omezenou** a **omezenou** posloupnost.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$;
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$;
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$;
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$;
- **monotónní**, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

- **Součtem posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme **rozdíl a součin posloupností**.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak **podílem posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbf{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.