

II.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že číslo $a \in \mathbf{R}$ je **limitou posloupnosti** $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0 , že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$; tj. pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon.$$

V tom případě říkáme rovněž, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** a ; posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje k** a . Zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nebo jen $\lim a_n = a$ nebo též $a_n \rightarrow a$.

Poznámka. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbf{R}$. Pak

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0.$$

Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má vlastní limitu** (ekvivalentně, **je konvergentní**), pokud existuje nějaké reálné číslo, které je její limitou.

Poznámka. Slovo **vlastní** v názvu oddílu a v předchozí definici znamená, že se zabýváme situací, kdy limitou posloupnosti je reálné číslo (a nikoli $\pm\infty$ jako v následujícím oddílu).

Definice. Necht $x \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. ε -**ovým okolím bodu** x rozumíme množinu

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}: |y - x| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Poznámka. Číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n \in B(a, \varepsilon).$$

Věta 1 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu (vlastní) limitu.*

Věta 2. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu, pak je $\{a_n\}$ omezená.*

Definice. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je **vybraná posloupnost z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též **podposloupnost** posloupnosti $\{a_n\}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$.

Věta 3 (limita vybrané posloupnosti). *Necht $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, pak také $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = A$.*

Poznámka. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $a \in \mathbf{R}$ a $K > 0$. Předpokládejme, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - a| < K\varepsilon.$$

Pak $a_n \rightarrow a$.

Věta 4 (aritmetika limit). Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$,
- (ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (iii) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Poznámka. Je-li $\lim b_n = B$ a $B \neq 0$, pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $b_n \neq 0$. Proto i v tomto případě často mluvíme o posloupnosti $\{a_n/b_n\}$, třebaže několik jejích členů není definováno. Pak v bodě (iii) Věty 4 lze škrtnout předpoklad nenulovosti všech členů posloupnosti $\{b_n\}$.

Poznámka. Věta 4 dává vzorce pro výpočet limit uvedených posloupností za předpokladu, že posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ mají vlastní limitu. Neříká nic o situaci, kdy tyto posloupnosti nemají limitu. Může se stát, že posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ nemají limitu, ale jejich součet či součin limitu má. Například pro $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$.

Věta 5 (limita a uspořádání). Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti. Označme $A = \lim a_n$, $B = \lim b_n$.

- (i) Necht' $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.
- (ii) Necht' existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Věta 6 (o dvou policajtech). Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ taková posloupnost, že platí:

- (i) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Věta 7. Necht' $\lim a_n = 0$ a necht' posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.