

## VI.4 Řešení soustav lineárních rovnic

*Poznámka.* V tomto oddíle ztotožňujeme  $\mathbf{R}^n$  a  $M(n \times 1)$ .

**Definice.** Mějme soustavu rovnic

$$(S) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde  $a_{ij} \in \mathbf{R}$ ,  $b_i \in \mathbf{R}$  pro  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  a  $x_1, \dots, x_n$  jsou neznámé. Označme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ a } (\mathbb{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matici  $\mathbb{A}$  nazýváme **maticí soustavy** (S), vektor  $\mathbf{b}$  **vektorem pravých stran** a matici  $(\mathbb{A}|\mathbf{b})$  **rozšířenou maticí soustavy** (S).

Soustavu (S) pak můžeme zapsat ve tvaru  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{x}$  je neznámý sloupcový vektor.

**Základní princip metody eliminace.** *Nechť  $\mathbb{A} \in M(m \times n)$  a  $\mathbf{b} \in M(m \times 1)$ . Nechť matice  $\mathbb{A}'$  vznikne z  $\mathbb{A}$  pomocí transformace  $T$ , nechť  $\mathbf{b}'$  vznikne z  $\mathbf{b}$  pomocí téže transformace  $T$ . Pak množina řešení soustavy  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je stejná jako množina řešení soustavy  $\mathbb{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ .*

**Věta 15** (o soustavách s čtvercovou maticí). *Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) *matice  $\mathbb{A}$  je regulární,*
- (ii) *soustava (S) má pro každé  $\mathbf{b} \in M(n \times 1)$  právě jedno řešení,*
- (iii) *soustava (S) má pro každé  $\mathbf{b} \in M(n \times 1)$  alespoň jedno řešení.*

**Poznámka.** Věta 15 říká následující: Je-li  $\mathbb{A}$  regulární, pak má soustava (S) pro každý vektor pravých stran právě jedno řešení. Není-li  $\mathbb{A}$  regulární, pak existuje vektor pravých stran, pro který soustava nemá řešení.

**Věta 16** (o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic). Uvažujme soustavu (S). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) Soustava (S) má řešení.
- (2) Matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnotu.
- (3) Vektor pravých stran lze vyjádřit jako lineární kombinací sloupců matice soustavy.

**Věta 17** (Cramerovo pravidlo). Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je regulární matice,  $\mathbf{b} \in M(n \times 1)$ ,  $\mathbf{x} \in M(n \times 1)$  a  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Pak

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

pro  $j = 1, \dots, n$ .

**Důsledek.** Nechť  $\mathbb{A} \in M(n \times n)$  je regulární matice a  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Definujme funkci  $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  předpisem

$$f_i(\mathbf{x}) = c, \quad \text{jestliže } c \text{ je } i\text{-tou souřadnicí} \\ \text{jediného řešení soustavy } \mathbb{A}\mathbf{y} = \mathbf{x},$$

neboli  $f_i(\mathbf{x})$  je  $i$ -tá souřadnice vektoru  $\mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}$ . Pak je funkce  $f_i$  spojitá na  $\mathbf{R}^n$ .