V.2 Parciální derivace

Definice. **Funkcí n proměnných** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$** (pokud limita existuje).

Poznámky. (1) Symbol x_j v zápise $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ označuje j-tou proměnnou; proto místo něj používáme označení j-té proměnné podle kontextu – takže píšeme například $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, někdy též $\partial_j f$.

(2) Označíme-li $\varphi(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$, pak φ je funkce jedné proměnné a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \varphi'(a_j),$$

je-li alespoň jeden z uvedených výrazů definován.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{x}$

- **maximum na M**, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M : \ f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- **lokální maximum vzhledem k M**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : \ f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,

Analogicky se definuje **minimum** na M a **lokální minimum** vzhledem k M.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ **lokální maximum**, má-li v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$. Podobně pro lokální minimum.

Věta 6 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} M$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce $f : M \to \mathbf{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém (vzhledem k M). Pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ neexistuje nebo je nulová.*