V.5 Funkce třídy C^1

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbf{R}$ je funkce n proměnných. Řekneme, že f je **třídy** C^1 **na** G, jestliže funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ je spojitá na G pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ (tj. pokud „f má na G spojité parciální derivace prvního řádu“). Množinu všech funkcí třídy C^1 na G značíme $C^1(G)$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbf{R}$ je funkce třídy C^1 a $\boldsymbol{a} \in G$. Pak graf funkce

$$T : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})(x_n - a_n), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$$

se nazývá **tečnou nadrovinou ke grafu funkce** f **v bodě** $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.

Poznámka. Je-li $n = 1$, pak tečná nadrovina je tečna; pro $n = 2$ tečné nadrovině říkáme **tečná rovina**.

Věta 11 (slabá Lagrangeova věta). *Nechť*

$$G = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : x_i \in (a_i, b_i) \text{ pro } i = 1, \dots, n\},$$

kde $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ splňují $a_i < b_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Nechť funkce $f : G \to \mathbf{R}$ má v každém bodě množiny G konečné parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in G$. Pak existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^n \in G$ takové, že pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ číslo ξ_i^j leží mezi u_i a v_i (tj. v uzavřeném intervalu s krajními body u_i a v_i) a platí

$$f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i) \cdot (v_i - u_i).$$

Věta 12 (o tečnosti tečné nadroviny). *Nechť f je funkce třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Je-li T funkce z definice tečné nadroviny, pak bod $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$ leží na grafu T a platí $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})} = 0$.*

Věta 13. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená. Je-li funkce f třídy C^1 na G, pak je f spojitá na G.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f \in C^1(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. **Gradientem** funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right].$$

Věta 14 (o derivaci složené funkce). *Nechť $r, s \in \mathbf{N}$ a $G \subset \mathbf{R}^s$, $H \subset \mathbf{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$ a funkce $f : H \to \mathbf{R}$ je třídy C^1 na H. Je-li složená funkce $F : G \to \mathbf{R}$ určená předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x}))$$

definována na G, pak $F \in C^1(G)$. Jestliže $\boldsymbol{a} \in G$ a $\boldsymbol{b} = [\varphi_1(\boldsymbol{a}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{a})]$, pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existuje v každém bodě otevřené množiny G. Pak definujeme parciální derivace druhého řádu předpisem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$. Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů.

Věta 15 (o záměnnosti parciálních derivací). *Nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ obě derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a tyto funkce jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité. Pak $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je

- **třídy C^2 na** G, má-li na G spojité všechny parciální derivace druhého řádu;
- **třídy C^∞ na** G, má-li na G spojité všechny parciální derivace všech řádů.

Analogicky se definuje funkce **třídy** C^k pro každé $k \in \mathbf{N}$.

Poznámka. Nechť G, H, f, $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ a F jsou jako ve Větě 14. Jestliže navíc f je třídy C^k na množině H a $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou třídy C^k na množině G, pak také F je třídy C^k na množině G.