

V.6 Věta o implicitních funkcích

Věta 16 (o implicitní funkci). Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \rightarrow \mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{y}] \in G$ a necht' platí:

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{y}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{\mathbf{x}}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu \tilde{y} tak, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\mathbf{x}, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(\mathbf{x})$, pak $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))},$$

pro $\mathbf{x} \in U$ a $j \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka. Je-li navíc F třídy C^k , je i φ třídy C^k .

Věta 17 (o implicitních funkcích). Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{m+n}$ je otevřená množina, $F_j : G \rightarrow \mathbf{R}$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}] \in G$ a necht' platí:

- (i) $F_j \in C^1(G)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$;
- (ii) $F_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$;
- (iii)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{\mathbf{x}}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{\mathbf{y}}$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $\mathbf{y} \in V$ s vlastností $F_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$. Označíme-li souřadnice tohoto \mathbf{y} jako $[\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})]$, pak $\varphi_j \in C^1(U)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$. Jsou-li navíc funkce F_1, \dots, F_m třídy C^k , jsou i funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ třídy C^k .

Poznámka. Symbol v podmínce (iii) Věty 17 je **determinant**. Definován bude v Kapitole VI. Pro $m = 1$ jde o podmínku (iii) z Věty

16, pro $m = 2$ jest $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.