VI.1 Matice a základní operace s nimi

Maticí typu $m \times n$ rozumíme tabulku čísel (reálných nebo komplexních):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zkráceně zapisujeme $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$. Pro $i \in \{1, \dots, m\}$ nazýváme n-tici

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})$$

i-**tým řádkem** matice, pro $j \in \{1, \dots, n\}$ nazýváme m-tici

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

j-**tým sloupcem** matice.

Matici typu $n \times n$ nazýváme **čtvercovou maticí řádu** n. Matici typu $1 \times n$ nazýváme **řádkovým vektorem**, matici typu $n \times 1$ **sloupcovým vektorem**.

Reálnou maticí rozumíme matici, jejíž všechny prvky jsou reálná čísla, v obecném případě mluvíme o **matici komplexní**. Množinu všech reálných matici typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$, pro množinu všech komplexních matic typu $m \times n$ používáme symbol $M_{\mathbf{C}}(m \times n)$.

Součtem matic $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ a $(b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ rozumíme matici

$$(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} + (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}.$$

Je-li λ číslo, pak λ-**násobkem matice** $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ rozumíme matici

$$\lambda(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}.$$

Poznámka. Dále budeme uvažovat jen reálné matice. Nicméně všechny definice i věty by bylo možné formulovat i pro komplexní matice. Důkazy by byly stejné, jen místo reálných čísel by se používala čísla komplexní.

Věta 1 (vlastnosti základních operací). *Platí:*

- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n) : \mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$;
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(m \times n) : \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}$;
- *existuje právě jedna matice typu* $m \times n$ *(budeme ji značit* $\mathbb{O}$*), která splňuje* $\mathbb{O} + \mathbb{A} = \mathbb{A}$ *pro každé* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$;
- *pro každou* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ *existuje právě jedna matice* $\mathbb{C}_{\mathbb{A}} \in M(m \times n)$ *splňující* $\mathbb{A} + \mathbb{C}_{\mathbb{A}} = \mathbb{O}$;
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} : (\lambda + \mu)\mathbb{A} = \lambda\mathbb{A} + \mu\mathbb{A}$;
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n) \forall \lambda \in \mathbf{R} : \lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$;
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} : (\lambda\mu)\mathbb{A} = \lambda(\mu\mathbb{A})$;
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) : 1 \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Poznámky.

- Matici $\mathbb{O}$ z třetího bodu říkáme **nulová matice** a všechny její prvky jsou nulové.
- Matice $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ z čtvrtého bodu se nazývá **maticí opačnou** k $\mathbb{A}$, značí se často $-\mathbb{A}$ a její prvek s indexem ij je číslo opačné k prvku matice $\mathbb{A}$ s indexem ij.

Je-li $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..k}}$ matice typu $n \times k$, pak **součinem** $\mathbb{AB}$ rozumíme matici typu $m \times k$, která na místě ij má číslo $\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$.

Poznámky.

(1) Je-li $\mathbb{A}$ matice typu $1 \times n$ a $\mathbb{B}$ matice typu $n \times 1$, je jejich součin $\mathbb{AB}$ matice typu 1×1, tedy vlastně číslo.

(2) Je-li $\mathbb{A}$ matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ matice typu $n \times k$, pak pro součin $\mathbb{AB}$ platí:
- Na místě ij má součin i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbb{B}$.
- j-tý sloupec je součinem matice $\mathbb{A}$ a j-tého sloupnce matice $\mathbb{B}$.
- i-tý řádek je součinem i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a matice $\mathbb{B}$.

Věta 2 (vlastnosti maticového násobení). *Následující tvrzení platí pro matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ takových typů, pro které jsou příslušné operace definovány:*

(i) $\mathbb{A}(\mathbb{BC}) = (\mathbb{AB})\mathbb{C}$;
(ii) $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{AB} + \mathbb{AC}$;
(iii) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{AC} + \mathbb{BC}$;
(iv) *Existuje právě jedna matice $\mathbb{I} \in M(n \times n)$ (říkáme jí* **jednotková matice***) taková, že $\forall \mathbb{A} \in M(n \times n) : \mathbb{AI} = \mathbb{IA} = \mathbb{A}$. Pro matici $\mathbb{I}$ navíc platí:*
$$\forall \mathbb{B} \in M(m \times n) : \mathbb{BI} = \mathbb{B}, \qquad \forall \mathbb{C} \in M(n \times k) : \mathbb{IC} = \mathbb{C}.$$

Poznámky.

- Maticové násobení není komutativní.
- Jednotková matice $\mathbb{I}$ řádu n má na místě ii pro $i \in \{1, \dots, n\}$ číslo 1, na ostatních místech má 0.

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ je matice typu $m \times n$. **Transponovanou maticí** $\mathbb{A}^T$ rozumíme matici $\mathbb{A}^T = (b_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}}$ typu $n \times m$ takovou, že pro každá $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ platí $b_{ij} = a_{ji}$.

Věta 3 (vlastnosti transponovaných matic).

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) : (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$;
(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n) : (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$;
(iii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \forall \mathbb{B} \in M(n \times k) : (\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.