V.2 Parciální derivace

Definice. **Funkcí n proměnných** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$** (pokud limita existuje).

Poznámky. (1) Symbol x_j v zápise $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ označuje j-tou proměnnou; proto místo něj používáme označení j-té proměnné podle kontextu – takže píšeme například $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, někdy též $\partial_j f$.

(2) Označíme-li $\varphi(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$, pak φ je funkce jedné proměnné a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \varphi'(a_j),$$

je-li alespoň jeden z uvedených výrazů definován.

(3) Dle uvedené definice může být parciální derivace vlastní či nevlastní. Nicméně obvykle uvažujeme pouze vlastní parciální derivace, protože na rozdíl od funkcí jedné proměnné, nevlastní parciální derivace mnoho nevypovídají. Proto nadále budeme slovy **parciální derivace** rozumět vlastní parciální derivace.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{x}$

- **maximum na M**, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M: \ f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,
- **lokální maximum vzhledem k M**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M: \ f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,

Analogicky se definuje **minimum** na M a **lokální minimum** vzhledem k M.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ **lokální maximum**, má-li v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$. Podobně pro lokální minimum.

Věta 6 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} M$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce $f : M \to \mathbf{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém (vzhledem k M). Pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ neexistuje nebo je nulová.*