VI.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Poznámka. V tomto oddíle ztotožňujeme $\mathbf{R}^n$ a $M(n \times 1)$.

Definice. Mějme soustavu rovnic

$$\text{(S)} \qquad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a $x_1, \dots, x_n$ jsou neznámé. Označme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ a } (\mathbb{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matici $\mathbb{A}$ nazýváme **maticí soustavy** (S), vektor $\boldsymbol{b}$ **vektorem pravých stran** a matici $(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$ **rozšířenou maticí soustavy** (S).

Soustavu (S) pak můžeme zapsat ve tvaru $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{x}$ je neznámý sloupcový vektor.

Základní princip metody eliminace. *Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ a $\boldsymbol{b} \in M(m \times 1)$. Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ pomocí transformace T, nechť $\boldsymbol{b}'$ vznikne z $\boldsymbol{b}$ pomocí téže transformace T. Pak množina řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je stejná jako množina řešení soustavy $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.*

Věta 15 (o soustavách s čtvercovou maticí). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice $\mathbb{A}$ je regulární,*
(ii) *soustava (S) má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ právě jedno řešení,*
(iii) *soustava (S) má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ alespoň jedno řešení.*

Poznámka. Věta 15 říká následující: Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak má soustava (S) pro každý vektor pravých stran právě jedno řešení. Není-li $\mathbb{A}$ regulární, pak existuje vektor pravých stran, pro který soustava nemá řešení.

Věta 16 (o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic). *Uvažujme soustavu* (S). *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *Soustava* (S) *má řešení.*
(2) *Matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.*
(3) *Vektor pravých stran lze vyjádřit jako lineární kombinací sloupců matice soustavy.*

Věta 17 (Cramerovo pravidlo). *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice,* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ a $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

pro $j = 1, \dots, n$.

Důsledek. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice a* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Definujme funkci* $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *předpisem*

$$f_i(\boldsymbol{x}) = c, \qquad \text{jestliže } c \text{ je } i\text{-tou souřadnicí jediného řešení soustavy } \mathbb{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x},$$

neboli $f_i(\boldsymbol{x})$ *je* i*-tá souřadnice vektoru* $\mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{x}$. *Pak je funkce* f_i *spojitá na* $\mathbf{R}^n$.