VII.2 Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

Poznámka. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy (tj. $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$), pak tato řada buď konverguje nebo má součet $+\infty$.

Věta 3 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 4. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní.

Poznámka. Věta 4 tedy říká, že každá absolutně konvergentní řada je i konvergentní.

Věta 3' (srovnávací kritérium podruhé). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady, pro které existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $0 \leq a_n \leq b_n$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 5 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(b) *Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0,+\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka. Z Věty 4 a Věty 5 plyne: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady, přičemž druhá z nich má kladné členy. Jestliže existuje vlastní limita $\lim |a_n/b_n|$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (dokonce absolutně).

Věta 6 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 7 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nenulovými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 8. *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.*