V.3 Spojitost a limita funkcí více proměnných

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.

- Řekneme, že f je **spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$**, jestliže platí
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)\colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$
- Nechť $A \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f **má v bodě $\boldsymbol{x}$ limitu** A (zapisujeme $\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{y}) = A$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\colon f(\boldsymbol{y}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, právě když $\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a f je funkce n proměnných.

(a) Nechť $\boldsymbol{x} \in M$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$ vzhledem k** M, jestliže platí
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$

(b) Řekneme, že f je **spojitá na** M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Věta 7 (Heine). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá na M,*

(ii) *pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ a každou posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ prvků M takovou, že $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$, platí $f(\boldsymbol{x}^j) \to f(\boldsymbol{x})$.*

Poznámka. Pro limity funkcí více proměnných platí analogie vět pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika limit, limita složené funkce). Navíc je funkce $\boldsymbol{x} \mapsto x_j$ spojitá na $\mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$.

V.4 Kompaktní množiny

Definice. Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

Definice. Řekneme, že množina M je **omezená** v $\mathbf{R}^n$, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $M \subset B(\mathbf{o}, r)$.

Lemma 8. *Nechť $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost prvků $\mathbf{R}^n$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{\boldsymbol{x}^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.*

Věta 9 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbf{R}^n$). *Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

Věta 10 (o nabývání extrémů). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f : M \to \mathbf{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá na M svého maxima i minima.*

Důsledek. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f : M \to \mathbf{R}$ je spojitá na M. Pak f je omezená na M.*