

X.1 Taylorův polynom funkcí jedné reálné proměnné

Definice. Nechť $k \in \mathbf{N}$ a f je funkce jedné reálné proměnné, která má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní k -tou derivaci. Pak **Taylorovým polynomem řádu k funkce f v bodě a** rozumíme polynom definovaný vzorcem

$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Věta 1 (Peanův tvar zbytku). Nechť $k \in \mathbf{N}$ a f je funkce jedné reálné proměnné, která má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní k -tou derivaci. Nechť P je polynom stupně nejvýše k . Pak platí $P = T_k^{f,a}$, právě když

$$(P) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

Poznámky. (1) Obsahem Věty 1 jsou dvě tvrzení – jedno říká, že polynom $P = T_k^{f,a}$ splňuje podmínku (P), druhé říká, že $T_k^{f,a}$ je jediný takový polynom stupně nejvýše k .

(2) Rovnost (P) lze vyjádřit takto: Existuje funkce ω , pro kterou platí

- $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$;
- $f(x) = P(x) + \omega(x) \cdot (x-a)^k$ na nějakém prstencovém okolí bodu a .

Větička 2. Na nějakém okolí bodu 0 platí:

- (1) $\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \omega(x) \cdot x^k$, $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$.
- (2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \omega(x) \cdot x^{2k}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$.
- (3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \omega(x) \cdot x^{2k+1}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$.
- (4) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}x^k + \omega(x)x^k$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$.
- (5) Pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ máme $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \omega(x)x^k$, $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$, kde $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^*$.

- (i) Řekneme, že **funkce f je v bodě a malé o od g** (píšeme $f(x) = o(g(x))$), $x \rightarrow a$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- (ii) Je-li navíc u funkce, pak zápis $f(x) = u(x) + o(g(x))$, $x \rightarrow a$, znamená $f(x) - u(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.

Věta 3. Necht' $a \in \mathbf{R}^*$.

- (i) Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, pak $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.
- (ii) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, pak $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \rightarrow a$.
- (iii) Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, a f_2 je nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)f_2(x))$, $x \rightarrow a$.
- (iv) Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, pak $f(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$.
- (v) Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, a f_2 je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a , pak $f_1(x)f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.
- (vi) Jestliže $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$ a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, pak $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \rightarrow a$.

Věta 4. Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $\varphi(x) \neq b$. Pak $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \rightarrow a$.

Věta 5 (Lagrangeův tvar zbytku). Necht' $k \in \mathbf{N}$, I je otevřený interval, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ a $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ existuje číslo ξ , které leží mezi a a x a pro něž platí

$$f(x) = T_k^a(x) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Větička 6.

(1) Ke každému $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ , který leží mezi 0 a x , pro něž platí $\exp x = 1 + x + \dots + \frac{x^k}{k!} + \exp \xi \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.

(2) Ke každému $k \in \mathbf{N}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ , který leží mezi 0 a x , pro něž platí

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + (-1)^k \cos \xi \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(3) Ke každému $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ , který leží mezi 0 a x , pro něž platí

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^{k+1} \cos \xi \cdot \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$