X.2 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice. **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** a nazýváme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ (má-li f v bodě a derivace všech řádů).

Věta 7. *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $r > 0$ a $f \in C^{\infty}((a-r, a+r))$. Nechť existuje $M > 0$ takové, že*

$$\forall x \in (a-r, a+r) \forall k \in \mathbf{N} : |f^{(k)}(x)| \leq M.$$

Pak je funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ součtem své Taylorovy řady o středu a.

Důsledek. *Pro každé $x \in \mathbf{R}$ jsou funkce* exp, sin a cos *součtem své Taylorovy řady o středu* 0. *Platí tedy:*

$$\forall x \in \mathbf{R} \colon \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k,$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \colon \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1},$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \colon \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Věta 8. *Platí:*

$$\forall x \in (-1, 1\rangle \colon \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,$$

$$\forall x \in (-1, 1) \colon (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

X.3 Taylorův polynom druhého řádu pro funkce více proměnných

Definice. Je-li f funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ parciální derivace prvního a druhého řádu, značíme

$$T_2^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Tuto funkci nazveme **Taylorovým polynomem druhého řádu funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$.
Připomeňme označení $\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}))$ a dále označme symbolem $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ matici druhých parciálních derivací v bodě $\boldsymbol{a}$ (tzv. **Hessova matice**), tj.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$$

Pak můžeme psát

$$T_2^{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 9. *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\Delta > 0$ a $f \in \mathcal{C}^2(B(\boldsymbol{a}, \Delta))$. Potom pro funkci ω splňující vztah*

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \Delta) \colon f(\boldsymbol{x}) = T_2^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \omega(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

platí $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0.$