

IX.3 Skalární součin a norma

Definice. Necht' $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

- **Skalárním součinem** vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} rozumíme číslo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

- **Normou** vektoru \mathbf{x} rozumíme číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{o}).$$

- Řekneme, že vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou **kolmé**, jestliže $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Větička 8 (vlastnosti skalárního součinu).

- (i) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$,
- (ii) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$,
- (iii) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \forall \alpha \in \mathbf{R} : \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Větička 9 (vlastnosti normy).

- (i) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq 0$,
- (ii) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : (\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o})$,
- (iii) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \forall \alpha \in \mathbf{R} : \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$,
- (iv) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost),
- (v) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (Cauchyova nerovnost).

Věta 10 (Pythagorova věta).

- (a) Necht' $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Pak vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou kolmé, právě když $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
- (b) Necht' $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$. Pak trojúhelník s vrcholy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ má u vrcholu \mathbf{z} pravý úhel (tj. vektory $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ a $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ jsou kolmé), právě když $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})^2$.