

IX.4 Kvadratické formy

Úmluva. V tomto oddílu je $\mathbf{R}^n = M(n \times 1)$.

Definice.

- Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je **symetrická**, jestliže $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$.
- Řekneme, že zobrazení $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je **kvadratická forma**, jestliže existuje symetrická matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ taková, že $Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbb{A} \mathbf{u} = \langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ pro $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

Poznámky. (1) Matice \mathbb{A} z definice se nazývá **reprezentující maticí kvadratické formy** Q . Lze ukázat, že reprezentující matice je kvadratickou formou určena jednoznačně.

(2) Je-li Q kvadratická forma, pak pro $x \in \mathbf{R}^n$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$.

Definice. Nechť $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že Q je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}: Q(\mathbf{u}) > 0$,
- **negativně definitní** (ND), jestliže $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}: Q(\mathbf{u}) < 0$,
- **pozitivně semidefinitní** (PSD), jestliže $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n: Q(\mathbf{u}) \geq 0$,
- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n: Q(\mathbf{u}) \leq 0$,
- **indefinitní** (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.

$$\exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: Q(\mathbf{u}) > 0 \ \& \ Q(\mathbf{v}) < 0.$$

Poznámka. Je-li $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ symetrická matice, pak říkáme, že tato matice je PD (ND, ...), má-li příslušnou vlastnost kvadratická forma reprezentovaná maticí \mathbb{A} .

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

Větička 11. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je diagonální. Pak platí:

- \mathbb{A} je **pozitivně definitní**, právě když $a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$;
- \mathbb{A} je **negativně definitní**, právě když $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n$;
- \mathbb{A} je **pozitivně semidefinitní**, právě když $a_{ii} \geq 0, i = 1, \dots, n$;
- \mathbb{A} je **negativně semidefinitní**, právě když $a_{ii} \leq 0, i = 1, \dots, n$;
- \mathbb{A} je **indefinitní**, právě když existují taková $i, j \in \{1, \dots, n\}$, že $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.

Definice. **Symetrickou elementární úpravou** matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice \mathbb{A} a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou. **Symetrickou transformací** matice \mathbb{A} budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 12. Nechť T je transformace matic typu $m \times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\mathbb{A}' \in M(m \times n)$ vznikla z $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ pomocí T , platí $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{A}'$.

Věta 13. Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoli matice $\mathbb{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ pomocí T , pak platí $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T = \mathbb{A}'$.

Lemma 14. Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Věta 15. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a nechť $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ vznikla z \mathbb{A} pomocí symetrické transformace. Jestliže \mathbb{A} je pozitivně definitní (negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), potom \mathbb{B} je také pozitivně definitní (negativně definitní, ...).

Věta 16. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.

Věta 17 (Sylvestrovo pravidlo). Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je symetrická matice.

(i) Označme $D_1 = \det(a_{11})$, $D_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ..., $D_n = \det \mathbb{A}$.
Pak platí:

- \mathbb{A} je pozitivně definitní, právě když $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_n > 0$.
- \mathbb{A} je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ..., $(-1)^n D_n > 0$.

(ii) Je-li $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, přičemž $i_1 < i_2 < \dots < i_k$,

označme $\tilde{D}_F = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$. Pak platí:

- \mathbb{A} je pozitivně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmnožinu F množiny $\{1, \dots, n\}$ je $\tilde{D}_F \geq 0$.
- \mathbb{A} je negativně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmnožinu F množiny $\{1, \dots, n\}$ je $(-1)^{|F|} \tilde{D}_F \geq 0$, kde $|F|$ značí počet prvků množiny F .

Důsledek. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Pak platí:

- \mathbb{A} je pozitivně definitní, právě když $a > 0$ a $ab - c^2 > 0$;
- \mathbb{A} je negativně definitní, právě když $a < 0$ a $ab - c^2 > 0$;
- \mathbb{A} je pozitivně semidefinitní, právě když $a \geq 0$, $b \geq 0$ a $ab - c^2 \geq 0$;
- \mathbb{A} je negativně semidefinitní, právě když $a \leq 0$, $b \leq 0$ a $ab - c^2 \geq 0$.