IX.5 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M_{\mathbf{C}}(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbf{C}$ je **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ takový, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Větička 18. *Nechť $\mathbb{A} \in M_{\mathbf{C}}(n \times n)$.*
(i) Prvek $\lambda \in \mathbf{C}$ je vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, právě když $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0$.
(ii) Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je polynom stupně n, který má u λ^n koeficient 1.
(iii) Matice $\mathbb{A}$ má nejvýše n různých vlastních čísel.

Poznámky. (1) Definice uvádíme pro komplexní matice, protože reálná matice nemusí mít reálná vlastní čísla.

(2) Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ nazýváme **charakteristickým polynomem** matice $\mathbb{A}$.

(3) **Násobností vlastního čísla** λ rozumíme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu.

(4) Součin všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$, pokud se každé počítá tolikrát, kolik je jeho násobnost, je roven $\det \mathbb{A}$. Analogický součet je roven $\mathrm{tr}(\mathbb{A})$ (viz následující oddíl). Obojí lze dokázat podrobnější analýzou tvaru charakteristického polynomu.

Věta 19. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.*

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ je **ortogonální**, jestliže platí $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$.

Poznámka. Nechť $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$. Označme $\boldsymbol{q}^1, \dots, \boldsymbol{q}^n$ sloupce matice $\mathbb{Q}$. Pak matice $\mathbb{Q}$ je ortogonální, právě když

- $\|\boldsymbol{q}_i\| = 1$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$;
- jsou-li $i, j \in \{1, \dots, n\}$ různá, pak $<\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j> = 0$, neboli vektory $\boldsymbol{q}_i$ a $\boldsymbol{q}_j$ jsou kolmé.

Stejné tvrzení platí pro řádky matice $\mathbb{Q}$.

Věta 20 (spektrální rozklad matice). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak existuje ortogonální matice $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ taková, že*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

Poznámky. (1) Sloupce matice $\mathbb{Q}$ z předchozí věty jsou vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. To napovídá jednak, jak by se Věta 20 dala dokázat, a jednak, jak by se matice $\mathbb{Q}$ dala najít.

(2) Množině vlastních čísel matice se říká **spektrum matice**.

(3) Jsou-li $\mathbb{A}$ a $\mathbb{Q}$ jako ve Větě 20, pak pro každý polynom $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ platí

$$a_m\mathbb{A}^m + a_{m-1}\mathbb{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathbb{A} + a_0\mathbb{I} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} p(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}\mathbb{Q}^T.$$

Matice nalevo se obvykle značí $p(\mathbb{A})$.

Důsledek. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak $\mathbb{A}$ je PD (ND, PSD, NSD), právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná (záporná, nezáporná, nekladná).*

IX.6 Stopa matice

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo $\mathrm{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Věta 21. *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. Pak platí:*

(i) $\mathrm{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{A}) + \mathrm{tr}(\mathbb{B})$,
(ii) $\mathrm{tr}(a\mathbb{A}) = a\,\mathrm{tr}(\mathbb{A})$,
(iii) $\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$,
(iv) $\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \mathrm{tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A})$.

Poznámka. Stopa matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je rovna součtu jejích vlastních čísel, pokud každé počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Je-li $\mathbb{A}$ symetrická, plyne to například z Věty 20. Obecný případ lze dokázat vylepšením Věty 18 – lze spočítat, že koeficient u λ^{n-1} v charakteristickém polynomu je roven $-\mathrm{tr}(\mathbb{A})$.

Definice. Matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ se nazývá **idempotentní**, jestliže $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$.

Věta 22. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je idempotentní matice. Pak platí:*

(i) *Vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou rovna 0 nebo 1.*
(ii) *Je-li $\mathbb{A}$ symetrická, je pozitivně semidefinitní.*
(iii) *Existuje regulární matice $\mathbb{Q}$ taková, že matice $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ je diagonální matice, která má na diagonále jen prvky 0 a 1.*
(iv) $h(\mathbb{A}) = \mathrm{tr}(\mathbb{A})$.
(v) $h(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = n - h(\mathbb{A})$.