# VIII.3 Primitivní funkce – úvod

**Připomenutí:** (1) Funkce $F$ je **primitivní funkcí** k $f$ na otevřeném intervalu $I$, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

(2) Je-li $f$ spojitá na otevřeném intervalu $I$, pak existuje primitivní funkce k $f$ na $I$ (Věta 8).

**Věta 10.** *Nechť $F$ a $G$ jsou primitivní funkce k funkci $f$ na otevřeném intervalu $I$. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

*Poznámka.* Množinu všech primitivních funkcí k $f$ na $I$ značíme symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Skutečnost, že $F$ je primitivní funkcí k $f$ na $I$ zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

**Větička 11.** *Platí:*

(1) $\int x^n\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *na* $\mathbf{R}$ *(pro* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$*);*

(2) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *na* $(0, +\infty)$ *(pro* $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$*, pro* $\alpha \in \mathbf{Z}$*,* $\alpha < -1$ *také na* $(-\infty, 0)$*);*

(3) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log x$ *na* $(0, +\infty)$*,* $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(-x)$ *na* $(-\infty, 0)$*;*

(4) $\int \exp x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \exp x$ *na* $\mathbf{R}$*;*

(5) $\int \sin x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x$ *na* $\mathbf{R}$*,* $\int \cos x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x$ *na* $\mathbf{R}$*;*

(6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x$ *na každém z intervalů* $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$*,* $k \in \mathbf{Z}$*;*

(7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ *na každém z intervalů* $(k\pi, (k+1)\pi)$*,* $k \in \mathbf{Z}$*;*

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin x$ *na* $(-1, 1)$*;*

(9) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x$ *na* $\mathbf{R}$*.*

**Větička 12.** *Nechť $f$ má na otevřeném intervalu $I$ primitivní funkci $F$, funkce $g$ má na $I$ primitivní funkci $G$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na $I$.*

*Poznámka.* Tvrzení předchozí větičky se často zapisuje ve tvaru

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

To má dobrý smysl, pokud je aspoň jedno z čísel $\alpha, \beta$ nenulové.

**Věta 13** (o substituci – první metoda). *Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$. Nechť $\varphi$ je funkce definovaná na $(\alpha,\beta)$ s hodnotami v intervalu $(a,b)$, která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha,\beta).$$

**Věta 14** (o substituci – druhá metoda, první verze). *Nechť funkce $\varphi$ má v každém bodě intervalu $(\alpha,\beta)$ nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť funkce $f$ je definována na intervalu $(a,b)$ a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha,\beta).$$

*Pak*

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b).$$

**Věta 15** (o substituci – druhá metoda, druhá verze). *Nechť funkce $f$ má primitivní funkci na $(a,b)$ (což je splněno například, je-li $f$ spojitá na $(a,b)$), funkce $\varphi$ má vlastní derivaci v každém bodě intervalu $(\alpha,\beta)$, je prostá na $(\alpha,\beta)$ a zobrazuje tento interval na interval $(a,b)$. Pokud platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha,\beta),$$

*pak*

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b).$$

**Věta 16** (integrace per partes). *Nechť $I$ je otevřený interval a funkce $f$ a $g$ jsou spojité na $I$. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $I$ a $G$ je primitivní funkce ke $g$ na $I$. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx \text{ na } I.$$