IX.6 Stopa matice

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Věta 21. *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. Pak platí:*
(i) $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$,
(ii) $\operatorname{tr}(a\mathbb{A}) = a \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,
(iii) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$,
(iv) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \operatorname{tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A})$.

Poznámka. Stopa matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je rovna součtu jejích vlastních čísel, pokud každé počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Je-li $\mathbb{A}$ symetrická, plyne to například z Věty 20. Obecný případ lze dokázat vylepšením Věty 18 – lze spočítat, že koeficient u λ^{n-1} v charakteristickém polynomu je roven $-\operatorname{tr}(\mathbb{A})$.

Definice. Matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ se nazývá **idempotentní**, jestliže $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$.

Věta 22. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je idempotentní matice. Pak platí:*

(i) *Vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou rovna* 0 *nebo* 1.
(ii) *Je-li $\mathbb{A}$ symetrická, je pozitivně semidefinitní.*
(iii) *Existuje regulární matice $\mathbb{Q}$ taková, že matice $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ je diagonální matice, která má na diagonále jen prvky* 0 *a* 1.
(iv) $h(\mathbb{A}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$.
(v) $h(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = n - h(\mathbb{A})$.