X.3 Taylorův polynom druhého řádu pro funkce více proměnných

Definice. Je-li f funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ parciální derivace prvního a druhého řádu, značíme

$$\mathsf{T}_2^{f,a}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Tuto funkci nazveme **Taylorovým polynomem druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.**
Připomeňme označení $\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}))$ a dále označme symbolem $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ matici druhých parciálních derivací v bodě $\boldsymbol{a}$ (tzv. **Hessova matice**), tj.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$$

Pak můžeme psát

$$\mathsf{T}_2^{f,a}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 9. *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\Delta > 0$ a $f \in \mathcal{C}^2(B(\boldsymbol{a}, \Delta))$. Potom pro funkci ω splňující vztah*

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \Delta) \colon f(\boldsymbol{x}) = \mathsf{T}_2^{f,a}(\boldsymbol{x}) + \omega(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0$.