XI.1 Lokální extrémy – podmínky druhého řádu

Definice. Nechť G je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{x} \in G$

- **lokálního maxima**, existuje-li $\delta > 0$ takové, že $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset G$ a
$$\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}).$$
- **ostrého lokálního maxima**, existuje-li $\delta > 0$ takové, že $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset G$ a
$$\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\} \colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x}).$$

Analogicky definujeme nabývání **lokálního minima** a **ostrého lokálního minima**. Body lokálního maxima a lokálního minima se nazývají **body lokálního extrému**. Je-li lokální maximum či minimum ostré, mluvíme o **bodech ostrého lokálního extrému**.

Definice. Bod $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ se nazývá **stacionárním** (někdy též **kritickým** bodem funkce f, jestliže $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Je-li $\boldsymbol{a}$ stacionárním bodem funkce f, ve kterém f nenabývá lokálního extrému, tj.
$$\forall \Delta > 0 \, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}, \Delta) \colon f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) \text{ a } f(\boldsymbol{y}) > f(\boldsymbol{a}),$$
pak bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme **sedlovým** bodem funkce f.

Věta 1 (nutné podmínky druhého řádu). *Budiž $G \subset \mathbf{R}^n$ otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\boldsymbol{a}$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*
(i) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního maxima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně semidefinitní.
(ii) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního minima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně semidefinitní.

Věta 2 (postačující podmínky druhého řádu). *Budiž $G \subset \mathbf{R}^n$ otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\boldsymbol{a}$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*
(i) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.
(ii) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.
(iii) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima, tj. $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkce f.

XI.2 Extrémy konkávních funkcí

Věta 3 (charakterizace konkávních funkcí třídy $\mathcal{C}^2$) . *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ otevřená konvexní množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Funkce f je na množině G konkávní, právě když pro všechna $\boldsymbol{x} \in G$ je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ je negativně semidefinitní.*

Věta 4. *Nechť G je otevřená konvexní podmnožina $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Nechť platí*
(i) $\forall \boldsymbol{x} \in G \colon \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ je negativně semidefinitní,
(ii) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.
Potom funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ svého maxima na množině G.