VIII.7 Lebesgueův integrál vlastnosti a metody výpočtu

Věta 33 (o vztahu Lebesgueova a zobecněného Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$. Je-li $f : (a, b) \to \langle 0, +\infty)$ spojitá funkce, pak*

$$(L) \int_{(a,b)} f \, d\lambda_1 = (ZR) \int_a^b f.$$

Úmluva: Dále budeme psát pouze $\int_A f$ místo $(L) \int_A f \, d\lambda_n$.

Definice. Řekneme, že nějaké tvrzení platí **pro skoro všechna** $x \in \mathbf{R}^n$ (nebo též **skoro všude na** $\mathbf{R}^n$), pokud existuje nulová množina $E \subset \mathbf{R}^n$, že dané tvrzení platí pro všechna $x \in R^n \setminus E$.

Věta 34 (Lebesgueův integrál a rovnost skoro všude).

(i) *Je-li $f = 0$ skoro všude, pak $\int_{\mathbf{R}^n} f = 0$.*

(ii) *Jsou-li f, g dvě měřitelné funkce takové, že $f = g$ skoro všude, pak $\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_{\mathbf{R}^n} g$, pokud alespoň jeden z těchto integrálů existuje.*

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že změníme-li nějakou funkci na nulové množině, existenci ani hodnotu integrálu to neovlivní. Proto je možné zavést následující konvenci:

Nechť $E \subset \mathbf{R}^n$ je nulová množina a $f : \mathbf{R}^n \setminus E \to \mathbf{R}^*$ nějaká funkce. Pak definujeme

$$\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_{\mathbf{R}^n \setminus E} f,$$

pokud integrál vpravo existuje.

To znamená, že pro definici integrálu z f přes $\mathbf{R}^n$ nepožadujeme, aby f byla definována na celém $\mathbf{R}^n$, ale jen „skoro všude“, tj. všude až na nějakou nulovou množinu. Pokud ji na této nulové množině nějak dodefinujeme, pak integrál z výsledné funkce nezávisí na tom, jak přesně jsme ji dodefinovali.

Analogickou konvenci použijeme i pro integrály přes menší množinu: Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$, $E \subset A$ je nulová množina a $f : A \setminus E \to \mathbf{R}^*$ nějaká funkce. Pak definujeme

$$\int_A f = \int_{A \setminus E} f,$$

pokud integrál vpravo existuje.

Užitečnost této konvence ilustrují některá z následujících tvrzení.

Věta 35 (základní vlastnosti Lebesgueova integrálu). *Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $f, g : A \to \mathbf{R}^*$ jsou dvě měřitelné funkce, které mají Lebesgueův integrál přes A.*

(1) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pak $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$, pokud je aspoň jedna strana definovaná.*

(2) *Je-li funkce $f + g$ definovaná (skoro) všude na A, pak $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$, pokud je součet vpravo definován.*

(3) *Pokud $f \le g$ (skoro všude) na A, pak $\int_A f \le \int_A g$.*

(4) *Pokud je f integrovatelná na A, pak i $|f|$ je integrovatelná na A. Navíc $\left|\int_A f\right| \le \int_A |f|$.*

(5) *Pro každou měřitelnou podmnožinu $B \subset A$ integrál $\int_B f$ existuje. Je-li navíc f integrovatelná přes A, je integrovatelná i přes B.*

(6) *Pokud $\{B_k\}$ je disjunktní posloupnost měřitelných podmnožin množiny A, pak*

$$\int_{\bigcup_k B_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f.$$

Věta 36 (Léviho o monotónní konvergenci). *Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\{f_k\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí definovaných na A. Předpokládejme, že pro (skoro) všechna $\boldsymbol{x} \in A$ je posloupnost $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ neklesající.*

Pak funkce $f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_k f_k(\boldsymbol{x})$ je měřitelná funkce (definovaná skoro všude) na A a $\int_A f = \lim\limits_{k\to\infty} \int_A f_k$.

Věta 37 (Lebesgueova o dominované konvergenci). *Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$, $\{f_k\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na A a f je měřitelná funkce na A. Nechť jsou splněny následující podmínky:*

(a) *$f_k \to f$ (skoro všude) na A.*
(b) *Existuje integrovatelná funkce $g : A \to \langle 0, +\infty\rangle$ taková, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $|f_k| \le g$ (skoro všude) na A.*

Pak $\int_A f = \lim\limits_{k\to\infty} \int_A f_k$.

Věta 38 (Fubiniova). *Nechť $k, l \in \mathbf{N}$ a $f : \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}*$ je měřitelná funkce, která má Lebesgueův integrál přes $\mathbf{R}^{k+l}$. Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$ definujme funkci $f_{\boldsymbol{x}} : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^*$ předpisem*

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^l.$$

Pak platí:

- *Pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$ je funkce $f_{\boldsymbol{x}}$ měřitelná a má Lebesgueův integrál přes $\mathbf{R}^l$.*
- *Funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^l} f_{\boldsymbol{x}}\, d\lambda_l$ je měřitelná.*
- *$\int_{\mathbf{R}^{k+l}} f = \int_{\mathbf{R}^k} \left(\int_{\mathbf{R}^l} f_{\boldsymbol{x}}\, d\lambda_l\right) d\lambda_k(\boldsymbol{x})$.*

Poznámka: *Předpoklad, že f má Lebesgueův integrál přes $\mathbf{R}^{k+l}$ je splněn mj. ve dvou důležitých případech pokud*

- *f je nezáporná měřitelná funkce; nebo*
- *f je integrovatelná.*

Věta 39 (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou třídy C^1 na G, zobrazení $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ definované předpisem*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = [\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{x})], \qquad \boldsymbol{x} \in G$$

nechť je prosté. Dále předpokládejme, že matice

$$\mathbb{J}_\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární v každém bodě $\boldsymbol{x} \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená množina a pro každou měřitelnou množinu $M \subset \varphi(G)$ a každou funkci $\cancel{f : G \to \mathbf{R}^*}$ platí
$f : \varphi(G) \to \mathbf{R}^*$

$$\int_M f = \int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathbb{J}_\varphi(\boldsymbol{x})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

pokud alespoň jeden z těchto integrálů je definován.

Věta 40 (příklady integrovatelných funkcí).

(1) *Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$. Pak platí*

$$\int_A 1 = \int_{R^n} \chi_A = \lambda_n(A).$$

Speciálně, χ_A je integrovatelná, právě když $\lambda_n(A) < +\infty$.

(2) *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená nebo uzavřená množina a f nechť je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M, tj. $\int_M f$ je reálné číslo.*

(3) *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je omezená konvexní otevřená množina a f nechť je funkce spojitá na $\overline{M}$. Pak $\int_M f = \int_{\overline{M}} f$.*

(4) *Nechť pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$. Nechť $M = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Nechť f je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M a platí*

$$\int_M f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$