

IX.1 Vektorové prostory

Úmluva. Symbol \mathbf{K} značí \mathbf{R} nebo \mathbf{C} .

Definice. Vektorovým prostorem nad \mathbf{K} rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a \cdot je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V , pokud tyto operace mají následující vlastnosti.

- (i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (komutativita sčítání),
- (ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V: (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (asociativita sčítání),
- (iii) množina V obsahuje prvek, který značíme \mathbf{o} , splňující
 $\forall \mathbf{v} \in V: \mathbf{o} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (existence nulového prvku),
- (iv) pro každý prvek $\mathbf{v} \in V$ existuje prvek $\mathbf{w} \in V$, který nazýváme **prvkem opačným** k \mathbf{v} , splňující $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$,
- (v) $\forall a, b \in \mathbf{K} \forall \mathbf{v} \in V: a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (ab) \cdot \mathbf{v}$,
- (vi) $\forall a, b \in \mathbf{K} \forall \mathbf{v} \in V: (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$,
- (vii) $\forall a \in \mathbf{K} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$,
- (viii) $\forall \mathbf{v} \in V: 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Poznámka: Nulový prvek je ve vektorovém prostoru jen jeden. Opačný prvek k danému $\mathbf{v} \in V$ existuje také jen jeden, značíme ho $-\mathbf{v}$.

Větička 1. Necht $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad \mathbf{K} . Potom platí:

- (i) $\forall \mathbf{v} \in V: 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o}$,
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V: (-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Definice. Necht $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad \mathbf{K} a necht $U \subset V, U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je **vektorový podprostor** prostoru $(V, +, \cdot)$, jestliže platí:

- (i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U: \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$,
- (ii) $\forall a \in \mathbf{K} \forall \mathbf{u} \in U: a \cdot \mathbf{u} \in U$.

Místo vektorový podprostor často říkáme stručněji **podprostor**.

Poznámky.

- (1) Je-li U podprostor $(V, +, \cdot)$, pak $\mathbf{o} \in U$ a $-\mathbf{u} \in U$, kdykoli $\mathbf{u} \in U$.
- (2) Je-li U vektorový podprostor $(V, +, \cdot)$, můžeme zúžit definiční obor operace $+$ (resp. \cdot) na množinu $U \times U$ (resp. $\mathbf{K} \times U$) a tím dostat zobrazení $U \times U$ do U (resp. $\mathbf{K} \times U$ do U). Pak U s těmito novými operacemi tvoří vektorový prostor nad \mathbf{K} .

Definice. Necht V je vektorový prostor nad \mathbf{K} . Necht $m \in \mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in V$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{K}$. Výraz

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ s koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Pokud je alespoň jedno z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ různé od nuly, mluvíme o **netriviální lineární kombinaci**, v opačném případě jde o **triviální lineární kombinaci**.

Definice. Necht V je vektorový prostor nad \mathbf{K} a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Symbolem $\text{lin}_{\mathbf{K}}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ označujeme množinu všech prvků V , které lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Tuto množinu nazýváme **vektorovým podprostorem generovaným vektory** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.

Věta 2. Necht V je vektorový prostor nad \mathbf{K} a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Pak je množina $\text{lin}_{\mathbf{K}}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ podprostorem V .

Poznámka. Podobně lze definovat $\text{lin}_{\mathbf{K}} M$, je-li M podmnožina vektorového prostoru V , jako množinu všech vektorů, které lze zapsat jako lineární kombinaci nějakých prvků M . I tato množina je podprostorem V .

Definice. Necht V je vektorový prostor nad \mathbf{K} . Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ z V ($m \in \mathbf{N}$) jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subset V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže pro každé $m \in \mathbf{N}$ je libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M lineárně nezávislá; tj. kdykoli $m \in \mathbf{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ jsou prvky M , které jsou po dvou různé (to znamená, že se mezi nimi žádný vektor nevyskytuje dvakrát), pak vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Definice. Budíž V vektorový prostor nad \mathbf{K} . Řekneme, že množina $B \subset V$ je **báze** prostoru V , jestliže

- (i) B je lineárně nezávislá,
- (ii) každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B , tj.
 $\forall \mathbf{v} \in V \exists m \in \mathbf{N} \exists \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in B \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{K} : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m.$

Poznámka. (1) Podmínku (ii) lze zapsat ve tvaru $\text{lin}_{\mathbf{K}} B = V$.

(2) Je-li B báze, je vyjádření každého vektoru \mathbf{v} z podmínky (ii) jednoznačné.

Věta 3. (i) Každý vektorový prostor má bázi. Dokonce každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi.

(ii) Počet prvků báze vektorového prostoru je jednoznačně určen. (T.j. všechny báze daného vektorového prostoru mají též počet prvků.)

Definice. Počet prvků báze vektorového prostoru V se nazývá **dimenze** V a značí se $\dim V$.

Poznámka. $\dim V$ může být buď 0 (je-li $V = \{\mathbf{o}\}$) nebo přirozené číslo nebo $+\infty$.

Větička 4. Necht V je vektorový prostor nad \mathbf{K} , $\dim V = n$ (kde $n \in \mathbf{N}$) a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.

- (i) Jsou-li $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé, tvoří bázi.
- (ii) Pokud $\text{lin}_{\mathbf{K}} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = V$, je $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ báze.