

IX.2 Lineární zobrazení

Definice. Necht U a V jsou vektorové prostory nad (týmž) \mathbf{K} . Zobrazení $L: U \rightarrow V$ se nazývá **lineární**, jestliže platí:

- (i) $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U: L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2)$,
- (ii) $\forall a \in \mathbf{K} \forall \mathbf{u} \in U: L(a\mathbf{u}) = aL(\mathbf{u})$.

Definice. Necht U a V jsou vektorové prostory nad \mathbf{K} , $L: U \rightarrow V$ necht je lineární zobrazení. **Jádrem** lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\text{Ker}(L) = \{\mathbf{u} \in U: L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

Symbolem $\text{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L .

Věta 5. Necht U a V jsou vektorové prostory nad \mathbf{K} , $L: U \rightarrow V$ necht je lineární zobrazení. Potom platí:

- (i) Množina $\text{Ker}(L)$ je vektorovým podprostorem U .
- (ii) Množina $\text{Im}(L)$ je vektorovým podprostorem V .
- (iii) $\dim U = \dim \text{Ker}(L) + \dim \text{Im}(L)$.

Věta 6. Necht U a V jsou vektorové prostory nad \mathbf{K} , $L: U \rightarrow V$ necht je lineární zobrazení a $\mathbf{b} \in V$. Jestliže $\mathbf{x}_0 \in U$ je řešení rovnice $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, pak množina všech řešení má tvar

$$\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{w}: \mathbf{w} \in \text{Ker}(L)\}.$$

Důsledek. Lineární zobrazení L je prosté, právě když $\text{Ker}(L) = \{\mathbf{o}\}$.

Věta 7. Je-li $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\mathbf{b} \in M(m \times 1)$ a $\mathbf{x}^0 \in M(n \times 1)$ řeší soustavu rovnic $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak množina všech řešení této soustavy má tvar

$$\{\mathbf{x}^0 + \mathbf{w}: \mathbb{A}\mathbf{w} = \mathbf{o}\}.$$

Poznámka. Definujme $L(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in M(n \times 1)$. Pak soustava $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, právě když $\mathbf{b} \in \text{Im}(L)$, a $\text{Im}(L)$ je podprostor $M(m \times 1)$ generovaný sloupci matice \mathbb{A} .