Doplňující cvičení k oddílu IX.1

Poznámka: Tato cvičení nejsou nezbytná pro Matematiku III, ale budou se hodit v Matematice IV.

Cvičení 1: Pro $\alpha \in \mathbf{R}$ nechť $\boldsymbol{x}_\alpha$ je posloupnost $\{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$. Ukažte, že množina

$$\{\boldsymbol{x}_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{R}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathfrak{s}$.

Návod: Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost, která je netriviální lineární kombinací posloupností* $\boldsymbol{x}_{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{\alpha_k}$. *Nechť* α *je největší z čísel* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, *pro které je koeficient v lineární kombinaci nenulový. Ukažte, že* $\lim_n \frac{a_n}{n^\alpha}$ *existuje a je různá od nuly. Z toho odvoďte, že posloupnost* $\{a_n\}$ *není konstantní nulová posloupnost.*

Cvičení 2: Pro $\alpha \in (0, +\infty)$ nechť $\boldsymbol{x}_\alpha$ je posloupnost $\{\alpha^n\}_{n=1}^\infty$. Ukažte, že množina

$$\{\boldsymbol{x}_\alpha \colon \alpha \in (0, +\infty)\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathfrak{s}$.

Návod: Postupujte analogicky jako ve Cvičení 1.

Cvičení 3: Pro $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nechť $\boldsymbol{x}_\alpha$ je posloupnost $\{\alpha^n\}_{n=1}^\infty$. Ukažte, že množina

$$\{\boldsymbol{x}_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathfrak{s}$.

Návod: Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost, která je netriviální lineární kombinací posloupností* $\boldsymbol{x}_{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{\alpha_k}$.

Pokud jsou všechna α_j *kladná, použijeme Cvičení 2. Pokud jsou všechna* α_j *záporná, postupujte podobně jako ve Cvičení 1 – jen vezměte nejmenší* α_j.

Pokud jsou některá kladná a některá záporná, vezměme největší z nich (α) *a nejmenší* (β). *Pokud* $\alpha > -\beta$, *pak* $\lim_n \frac{a_n}{n^\alpha}$ *je nenulová. Pokud* $\alpha < -\beta$, *pak* $\lim_n \frac{a_n}{n^\beta}$ *je nenulová. Pokud* $\alpha = -\beta$, *pak* $\lim_n \frac{a_n}{n^\alpha}$ *neexistuje. Nechť* α *je největší z čísel* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, *pro které je koeficient v lineární kombinaci nenulový. Ukažte, že* $\lim_n \frac{a_n}{n^\alpha}$ *existuje a je různá od nuly. Z toho odvoďte, že posloupnost* $\{a_n\}$ *není konstantní nulová posloupnost.*

Cvičení 4: Pro $\alpha \in \mathbf{R}$ nechť f_α je funkce definovaná předpisem

$$f_\alpha(x) = x^\alpha, \quad x \in (0, +\infty).$$

Ukažte, že množina

$$\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{R}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathcal{C}((0, +\infty))$.

Návod: Postupujte jako ve Cvičení 1, uvažte limitu pro $x \to +\infty$.

Cvičení 5: Pro $\alpha \in \mathbf{R}$ nechť f_α je funkce definovaná předpisem

$$f_\alpha(x) = x^\alpha, \quad x \in (0, 1).$$

Ukažte, že množina

$$\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{R}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathcal{C}((0, 1))$.

Návod: Postupujte podobně jako ve Cvičení 1, s tím rozdílem, že vezmete nejmenší α a limitu pro $x \to 0+$.

Cvičení 6: Pro $\alpha > 0$ nechť f_α je funkce definovaná předpisem

$$f_\alpha(x) = \alpha^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ukažte, že množina

$$\{f_\alpha \colon \alpha \in (0, +\infty)\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Návod: Postupujte jako ve Cvičení 1, uvažte limitu pro $x \to +\infty$.

Cvičení 7: Pro $\alpha \in \mathbf{R}$ nechť f_α je funkce definovaná předpisem

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ukažte, že množina

$$\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{R}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Návod: $e^{\alpha x} = (e^\alpha)^x$, takže jde o stejnou množinu jako ve Cvičení 6.