Doplňující cvičení k oddílům IX.3 až IX.5

Cvičení 1: Nechť $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$ jsou nenulové vektory, které jsou navzájem kolmé. Ukažte, že jsou lineárně nezávislé.

Návod: Ukažte z vlastností skalárního součinu a normy, že $\|\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k\|^2 = \alpha_1^2 \|\boldsymbol{x}_1\|^2 + \dots + \alpha_k \|\boldsymbol{x}_k\|^2$.

Cvičení 2: (PRO ZÁJEMCE) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Nechť $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ značí vektorový prostor všech spojitých (reálných) funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro $f, g \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ označme

$$< f, g >= \int_a^b fg.$$

Ukažte, že toto zobrazení je skalární součin.

Návod: Ověřte příslušné vlastnosti, viz komentář k oddílu IX.3.

Cvičení 3: (PRO ZÁJEMCE) Pro $n \in \mathbf{N}$ nechť $f_n(x) = \sin nx$; pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nechť $g_n(x) = \cos nx$ (speciálně $g_0(x) = 1$). Ukažte, že funkce

$$f_n, n \in \mathbf{N} \text{ a } g_n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

jsou navzájem kolmé v prostoru $\mathcal{C}(\langle 0, 2\pi\rangle)$ (vzhledem ke skalárnímu součinu ze Cvičení 2).

Návod: Spočtěte příslušné integrály, tj. $\int_0^{2\pi} f_k g_l$, $\int_0^{2\pi} f_k f_l$ *a* $\int_0^{2\pi} g_k g_l$.

Cvičení 4: (PRO ZÁJEMCE) Při značení ze Cvičení 3 ukažte, že množina

$$\{f_n \colon n \in \mathbf{N}\} \cup \{g_n \colon n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$$

je lineárně nezávislá v prostoru $\mathcal{C}(\langle 0, 2\pi\rangle)$.

Návod: Postupujte podobně jako ve Cvičení 1.

Cvičení 5: Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbf{R}$. Ukažte, že je buď nulová, nebo pozitivně definitní, nebo negativně definitní.

Návod: Uvědomte si, že $Q(x) = ax^2$ *pro nějaké* $a \in \mathbf{R}$.

Cvičení 6: Ukažte, že symetrická transformace nemění hodnost matice.

Návod: Řádkové i sloupcové úpravy zachovávají hodnost matice.

Cvičení 7: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice, která je pozitivně definitní nebo negativně definitní. Ukažte, že $\mathbb{A}$ je regulární.

Návod: Pro diagonální matici je to snadné. Symetrická matice lze symetrickou transformací převést na diagonální. Výsledná matice má stejnou povahu (definitnost) i hodnost (podle Cvičení 6).

Cvičení 8: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice. Ukažte, že platí ekvivalence:

1. $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když je pozitivně semidefinitní a zároveň regulární.
2. $\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když je negativně semidefinitní a zároveň regulární.

Návod: Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte Cvičení 7. Pro opačnou implikaci postupujte podobně jako ve Cvičení 7.

Cvičení 9: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice, která není nulová, ale všechny prvky na diagonále jsou nulové. Ukažte, že $\mathbb{A}$ je indefinitní.

Návod: Použijte Sylvestrovo pravidlo – Větu IX.17(ii). Ukažte, že aspoň jeden z příslušných determinantů řádu 2 je záporný.

Cvičení 10: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n, která je indefinitní. Ukažte, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že každá symetrická matice $\mathbb{B}$ řádu n, která splňuje

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon |a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon,$$

je indefinitní.

Návod: Existují $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, že $\boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} > 0$ a $\boldsymbol{y}^T \mathbb{A} \boldsymbol{y} < 0$. Použijte, že funkce $\mathbb{B} \mapsto \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x}$ je spojitá jako funkce n^2 proměnných.

Cvičení 11: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n, která je pozitivně definitní. Ukažte, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že každá symetrická matice $\mathbb{B}$ řádu n, která splňuje

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon |a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon,$$

je pozitivně definitní.

Návod: Použijte Sylvestrovo pravidlo – Větu IX.17(i). Použijte spojitost determinantu matic řádu k jakožto funkce k^2 proměnných.

Cvičení 12: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n, která je negativně definitní. Ukažte, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že každá symetrická matice $\mathbb{B}$ řádu n, která splňuje

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon |a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon,$$

je negativně definitní.

Návod: Použijte Sylvestrovo pravidlo – Větu IX.17(i). Použijte spojitost determinantu matic řádu k jakožto funkce k^2 proměnných.

Cvičení 13: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n.

1. Ukažte, že matice $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ je symetrická a pozitivně semidefinitní.
2. Nechť $\mathbb{A}$ je navíc regulární. Ukažte, že $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ je pozitivně definitní.

Návod: 1. Uvědomte si, že $\boldsymbol{x}^T\mathbb{A}^T\mathbb{A}\boldsymbol{x} = <\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}>$. 2. Využijte např. Cvičení 8.

Cvičení 14: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Ukažte, že $\mathbb{A}$ je regulární, právě když 0 není vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

Návod: Použijte Větičku IX.18(i).

Cvičení 15: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n a $\lambda \in \mathbf{C}$ je její vlastní číslo. Ukažte, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ je λ^k vlastním číslem matice $\mathbb{A}^k$.

Návod: Matematickou indukcí ukažte, že lze použít stejný vlastní vektor.

Cvičení 16: (PRO ZÁJEMCE) Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Ukažte, že všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}^2$ jsou tvaru λ^2, kde λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

Návod: Nechť $\mu \in \mathbf{C}$. Pak polynom $x^2 - \mu$ lze rozložit ve tvaru $x^2 - \mu = (x-\lambda)(x+\lambda)$ pro vhodné $\lambda \in \mathbf{C}$ (viz Věta VIII.18). Pak platí $\mu\mathbb{I} - \mathbb{A}^2 = (\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})(\lambda\mathbb{I} + \mathbb{A})$. Pokud μ je vlastní číslo $\mathbb{A}^2$, pak $\mu\mathbb{I} - \mathbb{A}^2$ není regulární, a tedy aspoň jedna z matic $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a $\lambda\mathbb{I} + \mathbb{A}$ není regulární, tedy buď λ nebo $-\lambda$ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

Cvičení 17: (PRO ZÁJEMCE) Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n a $k \in \mathbf{N}$. Ukažte, že všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}^k$ jsou tvaru λ^k, kde λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

Návod: Postupujte podobně jako ve Cvičení 16, s použitím rozkladu $x^k - \mu = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$.

Cvičení 18: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Ukažte, že matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^T$ mají stejná vlastní čísla.

Návod: Použijte Větičku IX.18(i) a větu o determinantu transponované matice.

Cvičení 19: Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n a $\lambda \in \mathbf{C}$ její vlastní číslo. Ukažte, že $\frac{1}{\lambda}$ je vlastním číslem inverzní matice $\mathbb{A}^{-1}$.

Návod: Ze Cvičení 14 víme, že $\lambda \neq 0$. Uvědomte si, že platí $\frac{1}{\lambda}\mathbb{I} - \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$. Nebo, alternativně, ukažte, že lze použít týž vlastní vektor.

Cvičení 20: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n.

1. Předpokládejme, že $\mathbb{A}$ má jediné vlastní číslo (násobnosti n), a to 0. Ukažte, že $\mathbb{A}$ je nulová matice.

2. Předpokládejme, že $\mathbb{A}$ má jediné vlastní číslo (násobnosti n), a to 1. Ukažte, že $\mathbb{A}$ je jednotková matice.

Návod: Použijte Větu IX.20.

Cvičení 21: Najděte příklady čtvercových matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ takových, že:

1. $\mathbb{A}$ má jediné vlastní číslo (násobnosti n), a to 0, ale není to nulová matice.

2. $\mathbb{B}$ má jediné vlastní číslo (násobnosti n), a to 1, ale není to jednotková matice.

Návod: Vezměte vhodné horní či dolní trojúhelníkové matice.

Cvičení 22: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n. Předpokládejme, že 0 je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, a to násobnosti k. Ukažte, že $h(\mathbb{A}) = n - k$.

Návod: Použijte Větu IX.20. Rozmyslete si, že hodnost matice $\mathbb{A}$ je stejná jako hodnost uvedené diagonální matice a že ta diagonální matice má na diagonále právě $n - k$ nenulových prvků.