K oddílu VIII.6 – Lebesgueova míra a Lebesgueův integrál

Celkové poznámky ke smyslu tohoto oddílu:

- V oddílu VIII.1 a VIII.2 jsme se věnovali Riemannovu integrálu, v oddílu VIII.5 zobecněnému Riemannovu integrálu.

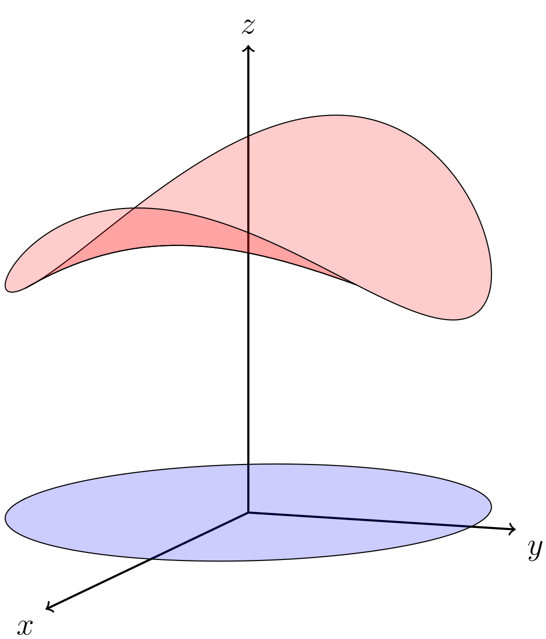
  Tato teorie je víceméně dostačující pro použití integrálu z funkcí jedné proměnné v ekonomických modelech.

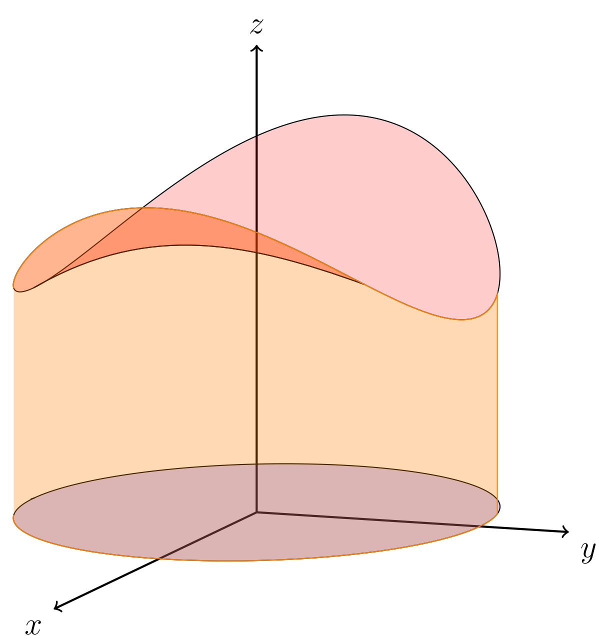
- Je však potřebné umět nějakým způsobem integrovat i funkce více proměnných.

  I zde chceme, aby integrál nějak vyjadřoval objem prostoru pod grafem.

  Nějak představitelné je to pro funkce dvou proměnných (pro funkce více proměnných již selhává geometrická představivost, ale teorie je podobná na základě analogie).

  Graf funkce dvou proměnných je (zhruba řečeno) plocha ve trojrozměrném prostoru. Chceme vědět, co je to objem oblasti mezi souřadnou rovinou a grafem.

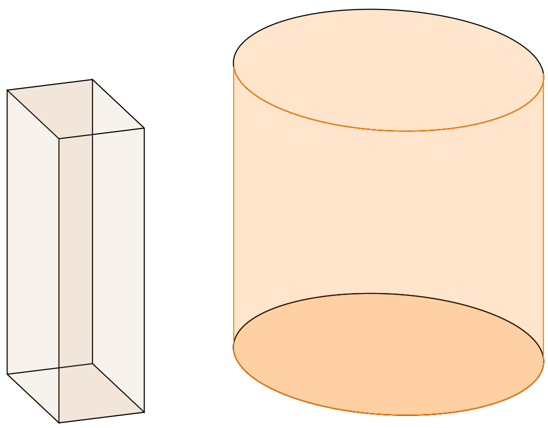




Ilustrují to tyto dva obrázky – máme funkci dvou proměnných definovanou na množině vyznačené modře, graf funkce je vyznačen růžově. Na druhém obrázku je vyznačena oblast, jejíž objem chceme určit.

- Pro definici Riemannova integrálu jsme vyšli z obsahu obdélníku a plochu pod grafem pak aproximovali pomocí obdélníků.

  Nyní je přirozené vyjít z objemu válce či hranolu.

  V tom případě je objem roven součinu obsahu podstavy a výšky.

  Dostáváme se ovšem k problému, jak spočítat obsah podstavy.

  To je snadné v případě, že podstavou je čtverec či obdélník. Pokud má podstava složitější tvar, již to jednoduché není.

- Funkce jedné proměnné obvykle uvažujeme definované na nějakém intervalu. Přitom interval lze přirozeně rozdělit na menší intervaly – tím se dostáváme k pojmu dělení intervalu a následně k horním a dolním součtům.

  Funkce více (třeba již dvou) proměnných bývají přirozeně definovány na množinách různých druhů a tvarů – někdy na otevřených, někdy uzavřených, někdy konvexních atp.

  Není jasné, jak takovou množinu rozdělit na menší množiny přirozeným způsobem.

  Tento problém se dá vyřešit různými cestami – můžeme uvažovat například dělení na obdélníky, ale pak se musíme nějak vyrovnat s tím, že třeba kruh se na obdélníky dělí dost špatně (nějak vyřešit to lze), nebo uvažovat dělení na (téměř) libovolné množiny.

Zvolíme druhou možnost – k tomu ovšem potřebujeme nejprve vědět, co to znamená obsah takové libovolné množiny.

K tomu slouží pojem Lebesgueovy míry. Proto si nejprve přiblížíme, co to je Lebesgueova míra, a teprve potom se budeme věnovat integrálu.

- Třebaže si definice a potřebná tvrzení budeme formulovat přesně, s jejich zdůvodňováním zůstaneme na intuitivní rovině. Kdyby se totiž mělo dělat vše pořádně, zabere to téměř celý semestr.

K definici a vlastnostem borelovských množin

- Jak jsme řekli výše, naším cílem teď je nějak rozumně definovat obsah podmnožin roviny (a také objem podmnožin trojrozměrného prostoru a obecněji n-rozměrný objem podmnožin $\mathbf{R}^n$.

  Chceme onen obsah či objem definovat pro „téměř libovolné" množiny.

  Lze ovšem ukázat, že to nejde rozumně udělat pro všechny množiny. (Přesná formulace tohoto tvrzení, jakož i jeho důkaz, jsou zcela mimo rozsah Matematiky III.)

- Proto začneme tím, že popíšeme systém „pěkných množin", u nichž obsah či objem půjde rozumně definovat.

- Systém $\mathcal{B}_n$ je tvořen „pěknými" množinami.

  Za „pěkné" se prohlásí jednak otevřené množiny, a jednak množiny, které z „pěkných" vzniknou pomocí dvou základních operací – doplňku a sjednocení posloupnosti množin.

  Tedy formulace „nejmenší systém množin s vlastnostmi" lze chápat jako systém těch množin, které vzniknou z otevřených množin uvedenými dvěma operacemi (třeba i opakovanými).

- K dalším vlastnostem systému $\mathcal{B}_n$:

  (iv): Protože uzavřené množiny jsou právě doplňky otevřených množin a systém $\mathcal{B}_n$ obsahuje otevřené množiny (bod (i)) a s každou množinou obsahuje i její doplněk (bod (ii)), obsahuje i všechny uzavřené množiny.

Schematicky: Nechť A je uzavřená množina. Pak

$$A = \underbrace{\mathbf{R}^n \setminus \Big(\underbrace{\mathbf{R}^n \setminus A}_{\text{otevřená, tedy } \in \mathcal{B}_n \text{ dle (i)}} \Big)}_{\in \mathcal{B}_n \text{ dle (ii)}}$$

(vi): Pokud $\{A_k\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{B}_n$, pak jejich průnik patří do $\mathcal{B}_n$ podle bodů (ii) a (iii) a de Morganových pravidel. Schematicky

$$\bigcap_k A_k \overset{\text{Věta I.4}}{=} \underbrace{\mathbf{R}^n \setminus \underbrace{\bigcup_k \underbrace{(\mathbf{R}^n \setminus A_k)}_{\in \mathcal{B}_n \text{ dle (ii)}}}_{\in \mathcal{B}_n \text{ dle (iii)}}}_{\in \mathcal{B}_n \text{ dle (ii)}}.$$

(v): Pokud $A, B \in \mathcal{B}_n$, pak:
$A \cup B \in \mathcal{B}_n$ podle vlastnosti (iii) aplikované na posloupnost $A, B, B, B, B, \ldots$
$A \cap B \in \mathcal{B}_n$ podle vlastnosti (vi) aplikované na posloupnost $A, B, B, B, B, \ldots$
$$B \setminus A = \underbrace{B \cap \underbrace{(\mathbf{R}^n \setminus A)}_{\in \mathcal{B}_n}}_{\in \mathcal{B}_n}$$

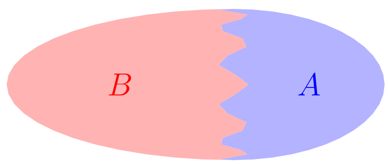
- Příklady borelovských množin v $\mathbf{R}$:
  - otevřené množiny: například otevřené intervaly, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$,...
  - uzavřené množiny: například uzavřené intervaly, konečné množiny, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$,...
  - polouzavřené intervaly $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$;
  - $\mathbf{Q} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \underbrace{\{\frac{m}{k} : m \in \mathbf{Z}\}}_{\text{uzavřená množina}}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

K Větě VIII.28:

- Tato věta říká, že náš cíl, tj. definovat rozumným způsobem obsah (objem) „pěkných množin“ je dosažitelný, a to právě jedním způsobem.

- Podmínka (a) říká, že chceme, aby obsah obdélníku (objem kvádru, obecněji n-rozměrný objem n-rozměrného kvádru) byl roven součinu délek stran (hran), tedy v souladu s naší představou obsahu a objemu.

- Podmínka (b) říká, že chceme, aby objem sjednocení byl roven součtu objemů – například, když vezmeme dvě množiny, které se nepřekrývají (jsou disjunktní), aby obsah (objem) jejich sjednocení šlo spočítat jako součet jejich obsahů (objemů).

  obsah $A \cup B =$ obsah A + obsah B

  Podmínka (b) vyžaduje, aby toto pravidlo platilo nejen pro dvě množiny, ale i pro posloupnost množin. Tato silnější podmínka je důležitá pro fungování mnoha výpočetních metod.

  Obsahem věty mj. je, že i tato silnější podmínka je splnitelná.

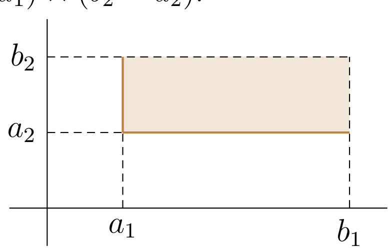
- Věta říká, že příslušná metoda měření obsahu (objemu) existuje a je jednoznačně určená. Není z ní ovšem patrné, jak tuto veličinu počítat.

  Některé metody výpočtu jsou založeny na dále uvedených větách. Kromě toho určitou představu dává důkaz této věty.

  Důkaz je ovšem dosti dlouhý a přesahuje rámec Matematiky III, proto ho dělat nebudeme. Nicméně pro zájemce uvádím velmi stručný nástin dvou metod konstrukce funkce λ_n (tj. Lebesgue-Borelovy míry):

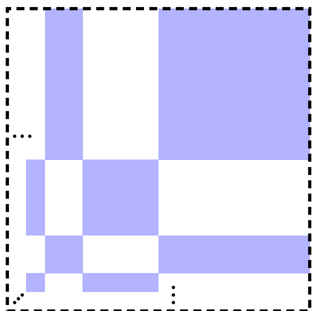
  – Metoda první (pro $n = 2$):

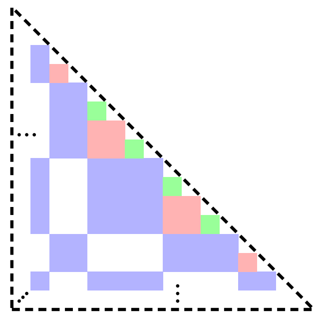
    1. krok: Vyjdeme z polouzavřených obdélníků $\langle a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2)$, jejichž obsah je stejný jako pro uzavřené obdélníky, tedy $(b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$.

2. krok: Každá otevřená množina v $\mathbf{R}^2$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktní posloupnosti polouzavřených obdélníků. Její míra (tj. „obsah“) se pak bude rovnat součtu obsahů oněch obdélníků.

Na následujících dvou obrázcích je ilustrováno, jakým způsobem lze polouzavřenými obdélníky vyplnit otevřený čtverec nebo trojúhelník.





3. krok: Pokud známe míru každé z množin A_k a platí

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots,$$

pak

$$\lambda_n(\bigcup_k A_k) = \lim_k \lambda_n(A_k) = \sup_k \lambda_n(A_k).$$

Podobně, pokud známe míru každé z množin A_k a platí

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots,$$

a přitom $\lambda_n(A_1) < +\infty$ pak

$$\lambda_n(\bigcap_k A_k) = \lim_k \lambda_n(A_k) = \inf_k \lambda_n(A_k).$$

Takto lze postupně určit míru každé borelovské množiny (to ovšem není zřejmé).

– Metoda první pro obecné n je podobná, jen se začne s polouzavřenými n-rozměrnými kvádry

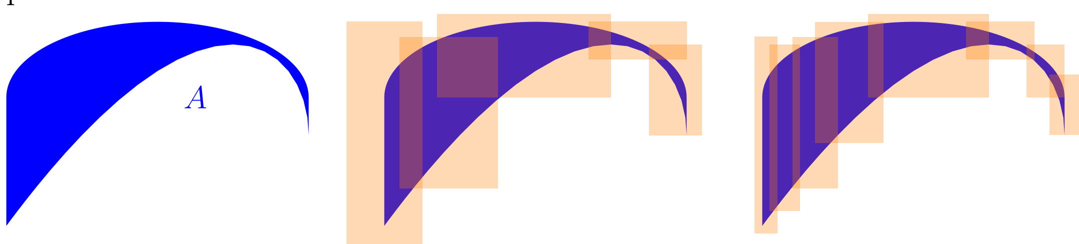
$$\langle a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2) \times \dots \times \langle a_2, b_n).$$

– Metoda druhá: Napíšeme vzoreček pro $\lambda_n(A)$ pro $A \in \mathcal{B}_n$:

$$\lambda_n(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{objem}\, Q_k \colon (Q_k) \text{ je posloupnost uzavřených kvádrů}, A \subset \bigcup_k Q_k\right\}$$

Myšlenka za tímto vzorečkem je, že se míru množiny snažíme shora aproximovat pomocí kvádrů (které se mohou i překrývat, ale samozřejmě, čím méně se překrývají, tím by měla být aproximace přesnější).

Na následujícím obrázku je množina A a pak dvě její aproximace pomocí obdélníků.



Výhodou této metody je explicitní vzoreček pro λ_n.

Nevýhodou je, že tento vzoreček není příliš použitelný k výpočtům.

Samozřejmě ani při této metodě není zřejmé, že vzoreček funguje, jak má (důkaz je docela dlouhý).

- Poznámka: Lebesgue-Borelova míra λ_n má ještě jednu důležitou a užitečnou vlastnost:

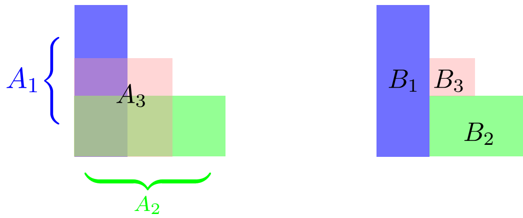
$$\text{Je-li } \{A_k\} \text{ posloupnost v } \mathcal{B}_n, \text{ pak } \lambda_n(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \lambda_n(A_k) \qquad (\clubsuit)$$

Dokažme si to: Označme

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots B_k = A_k \setminus \bigcup_{j<k} A_j, \ldots$$

Pak $\{B_k\}$ je posloupnost množin v $\mathcal{B}_k$ (podle vlastnosti (v)), navíc jsou tyto množiny disjunktní, $B_k \subset A_k$ a $\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k$.

Tato operace pro tři množiny je znázorněna na obrázcích:



Je tedy:

$$\lambda_n(\bigcup_k A_k) = \lambda_n(\bigcup_k B_k) \overset{(b)}{=} \sum_k \lambda_n(B_k) \overset{B_k \subset A_k}{\leq} \sum_k \lambda_n(A_k).$$

A to je ono.

K měřitelným množinám a Lebesgueově míře:

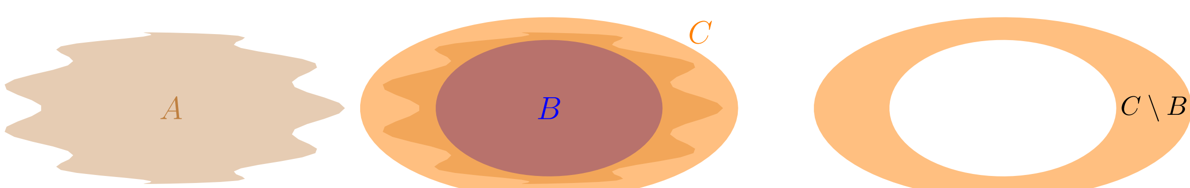
- Ukazuje se potřebné systém borelovských množin ještě trochu rozšířit. Důvod je ten, že existují borelovské množiny, které mají nulovou míru, a přitom některé jejich podmnožiny nejsou borelovské. (Proč tomu tak je, vysvětlovat nebudeme.)

  Přitom by bylo přirozené, aby podmnožina množiny míry nula měla také míru nula.

  Proto se zavádí systém (lebesgueovsky) měřitelných množin.

- Množina je měřitelná, pokud se „velmi málo liší “ od nějaké borelovské množiny. Přesněji:

  Množina A je měřitelná, pokud najdeme borelovské množiny B a C, aby $B \subset A \subset C$ a přitom $\lambda_n(C \setminus B) = 0$.



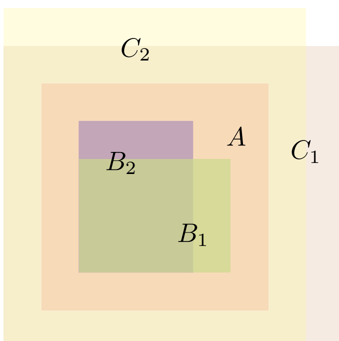
  Pokud $\lambda_n(C \setminus B) = 0$, pak $\lambda_n(B) = \lambda_n(C)$, protože

$$\lambda_n(C) = \lambda_n(B) + \underbrace{\lambda_n(C \setminus B)}_{=0}.$$

V takovém případě za míru množiny A prohlásíme míru množiny B (nebo C, vyjde to nastejno).

- Pokud zvolíme jinou dvojici B, C s týmiž vlastnostmi, míra množiny A vyjde stejně, definice tedy dává smysl.

  Přesněji:



Máme

$B_1 \subset A \subset C_1$, $\lambda_n(C_1 \setminus B_1) = 0$

$B_2 \subset A \subset C_2$, $\lambda_n(C_2 \setminus B_2) = 0$

$B_2 \setminus B_1 \subset A \setminus B_1 \subset C_1 \setminus B_1 \Rightarrow \lambda_n(B_2 \setminus B_1) = 0$

$B_1 \setminus B_2 \subset A \setminus B_2 \subset C_2 \setminus B_2 \Rightarrow \lambda_n(B_1 \setminus B_2) = 0$

$\lambda_n(B_1) = \lambda_n(B_1 \cap B_2) + \lambda_n(B_1 \setminus B_2) = \lambda_n(B_1 \cap B_2)$

$\lambda_n(B_2) = \lambda_n(B_1 \cap B_2) + \lambda_n(B_2 \setminus B_1) = \lambda_n(B_1 \cap B_2)$

Tedy $\lambda_n(B_1) = \lambda_n(B_2)$.

- Máme tedy dobře definovaný systém $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ a zobrazení $\widetilde{\lambda}_n$. Věta VIII.29 shrnuje jejich vlastnosti.

  Probereme jednotlivé body:

  - Tvrzení (1)–(3) shrnují základní vlastnosti systému $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ a tvrzení (4)–(7) základní vlastnosti Lebesgueovy míry. Tato tvrzení je jednoduché dokázat, proto jejich důkazy uvádíme.

(1) a (5): Pokud $A \in \mathcal{B}_n$, pak zřejmě $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ – v definici lze vzít $B = C = A$. Tedy i $\widetilde{\lambda}_n(A) = \lambda_n(A)$.

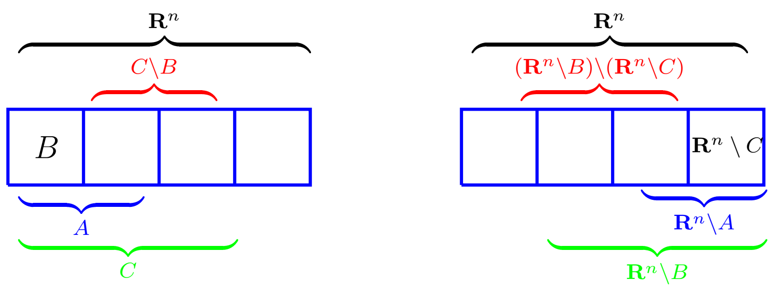
(2): Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$. To znamená, že existují $B, C \in \mathcal{B}_n$, pro něž platí $B \subset A \subset C$ a $\lambda_n(C \setminus B) = 0$.
Podle bodu (ii) platí $\mathbf{R}^n \setminus B, \mathbf{R}^n \setminus C \in \mathcal{B}_n$.
Navíc

$$\mathbf{R}^n \setminus C \subset \mathbf{R}^n \setminus A \subset \mathbf{R}^n \setminus B$$

a

$$\lambda_n((\mathbf{R}^n \setminus B) \setminus (\mathbf{R}^n \setminus C)) = \lambda_n(C \setminus B) = 0,$$

tedy $\mathbf{R}^n \setminus A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$.
Vztahy mezi jednotlivými množinami jsou schematicky znázorněny na obrázcích:



(3) a (6): Nechť (A_k) je posloupnost množin z $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.

Podle definice to znamená, že pro každé k existují množiny $B_k, C_k \in \mathcal{B}_n$ takové, že $B_k \subset A_k \subset C_k$ a $\lambda_n(C_k \setminus B_k) = 0$.

Označme $B = \bigcup_k B_k$ a $C = \bigcup_k C_k$.

Podle vlastnosti (iii) platí $B, C \in \mathcal{B}_n$.

Dále, zřejmě platí $B \subset \bigcup_k A_k \subset C$.

Zbývá si rozmyslet, že $\lambda_n(C \setminus B) = 0$.

Protože ovšem máme

$$C \setminus B = (\bigcup_k C_k) \setminus (\bigcup_k B_k) \subset \bigcup_k (C_k \setminus B_k),$$

plyne rovnost $\lambda_n(C \setminus B) = 0$ z (♣).

Tím je tvrzení (3) dokázáno pro sjednocení. Pro průnik plyne z tvrzení pro sjednocení, z (2) a z de Morganových pravidel (viz důkaz vlastnosti (vi)).

Nyní přejděme k vlastnosti (6): Z právě provedené konstrukce plyne, že $\widetilde{\lambda}_n(\bigcup_k A_k) = \lambda_n(B)$.

Pokud jsou množiny A_k disjunktní, jsou disjunktní i množiny B_k, a tedy

$$\widetilde{\lambda}_n(\bigcup_k A_k) = \lambda_n(B) = \lambda_n(\bigcup_k B_k) \overset{(b)}{=} \sum_k \lambda_n(B_k) = \sum_k \widetilde{\lambda}_n(A_k).$$

(4): Toto plyne z (2) a (3), viz důkaz vlastnosti (v).

(7): Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ splňuje $\widetilde{\lambda}_n(A) = 0$.

Podle definice to znamená, že existují množiny $E, F \in \mathcal{B}_n$, splňující $E \subset A \subset F$, $\lambda_n(F \setminus E) = 0$ a $\lambda_n(E) = 0$.

Pak i $\lambda_n(F) = 0$ (jak bylo vysvětleno výše).

Pokud nyní $B \subset A$, pak můžeme vzít množiny $\emptyset, F \in \mathcal{B}_n$. Pro ně platí $\emptyset \subset B \subset F$ a $\lambda_n(F \setminus \emptyset) = 0$.

Tedy $B \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\widetilde{\lambda}_n(B) = \lambda_n(\emptyset) = 0$.

(8): Tato vlastnost, nazývaná translační invariance (tj. nezávislost na posunutí), říká, že pokud měřitelnou množinu posuneme o nějaký vektor, zůstane měřitelnou a její míra se nezmění.

Důkaz provádět nebudeme, jen poznamenáme, že je zřejmé, že to platí pro kvádry (viz bod (a) Věty VIII.28) a obecné tvrzení plyne například z výše uvedeného vzorce pro λ_n.

(9): Tato vlastnost se nazývá **regularita Lebesgueovy míry**. Je důležitá v tom, že ukazuje, že Lebesgueova míru každé měřitelné množiny lze aproximovat zdola pomocí kompaktních množin a shora pomocí otevřených množin.

Dokazovat ji nebudeme, není to snadné, plyne to opět z výše uvedeného vzorce pro λ_n.

- Dále budeme místo $\widetilde{\lambda}_n$ psát jenom λ_n. Značení s vlnkou bylo jen dočasné, abychom si vysvětlili vztah Lebesgue-Borelovy míry a Lebesgueovy míry.

  Ale samozřejmě systémy $\mathcal{B}_n$ a $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ je třeba rozlišovat i nadále.

Nulové množiny a Věta VIII.30:

- Nulová množina je měřitelná množina, jejíž Lebesgueova míra je rovna nule. Tyto množiny hrají důležitou roli při formulaci a použití vět o Lebesgueově integrálu, jak uvidíme později.

- Bod (a): Jednoprvkové množiny jsou nulové.

  Jednoprvková množina je uzavřená, tedy určitě měřitelná.

  Že má míru nula lze nahlédnout například takto:

  Nechť $\boldsymbol{a} = [a_1, \dots, a_n]$ je bod v $\mathbf{R}^n$.

  Ten je pro každé $\varepsilon > 0$ obsažen v kvádru

$$\langle a_1, a_1 + \varepsilon\rangle \times \langle a_2, a_2 + \varepsilon\rangle \times \cdots \times \langle a_n, a_n + \varepsilon\rangle.$$

Míra tohoto kvádru je ε^n (viz bod (a) Věty VIII.28).

Tedy míra množiny $\{\boldsymbol{a}\}$ je menší nebo rovna ε^n. Protože $\varepsilon^n \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$, musí být míra nulová.

- Bod (b) je jen přeformulovaný bod (7) Věty VIII.29.

- Bod (c) plyne z (♣), pokud si uvědomíme, že (♣) platí i pro $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ (což se dokáže stejně jako pro $\mathcal{B}_n$, jen se použijí příslušné body Věty VIII.29).

- Bod (d) říká, že hranice konvexní množiny je nulová množina.

  Měřitelná je, protože je uzavřená (jako hranice libovolné množiny).

  To, že má míru nula, není nyní zřejmé. Je to vidět pro $n = 1$, tedy v $\mathbf{R}$. Konvexní množiny v $\mathbf{R}$ jsou totiž jen jednobodové množiny a intervaly (a ještě prázdná množina). Hranice je tedy buď prázdná množina, nebo jednobodová množina nebo dvoubodová množina. Ve všech případech je to tedy nulová množina.

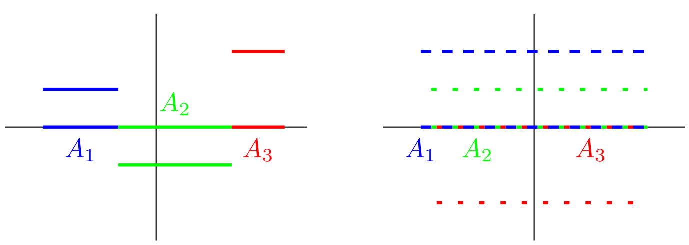
  Jak se dá tvrzení dokázat indukcí pro obecné n, naznačíme později.

K jednoduchým funkcím a jejich integraci:

- Jednoduchou funkci lze chápat jako funkci „po částech konstantní“, jen ty části mohou být libovolné měřitelné množiny.

  Jednoduchá funkce má vždy konečný obor hodnot ($c_1, \ldots, c_k$ a případně ještě 0).

  Na následujících obrázcích jsou příklady dvou jednoduchých funkcí na $\mathbf{R}$, které kromě nuly nabývají ještě tří dalších hodnot. (Na ose x jsou barevně vyznačeny množiny A_1, A_2, A_3, pak je vyznačen graf funkce, která má na každé z množin A_1, A_2, A_3 nějakou konstantní hodnotu. Na zbytku reálné osy je funkce nulová.)



- Pokud $f = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \cdots + c_k\chi_{A_k}$, kde $A_1, \ldots, A_k$ jsou měřitelné množiny, pak f je jednoduchá funkce, i když $A_1, \ldots, A_k$ nejsou disjunktní.

  Důvod je ten, že ji pak můžeme vyjádřit v podobném tvaru pro větší počet disjunktních měřitelných množin. Způsob, jak to udělat, je přímočarý, ilustrujeme si to pro dvě množiny:

  $$c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} = c_1\chi_{A_1\setminus A_2} + c_2\chi_{A_2\setminus A_1} + (c_1 + c_2)\chi_{A_1\cap A_2}.$$

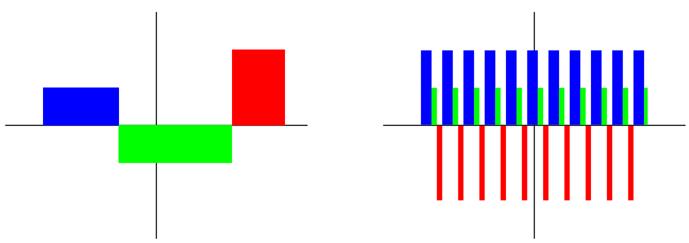
- Je zřejmé, že násobek jednoduché funkce je také jednoduchá funkce.

  Dále součet nebo součin dvou jednoduchých funkcí je opět jednoduchá funkce. Pro součet to snadno plyne z tvrzené v přechozím bodě (součet dvou jednoduchých funkcí je stejného tvaru jako jednoduchá funkce, až na to, že příslušné množiny nemusí být disjunktní).

  Pro součin to také z předchozího bodu, pokud si uvědomíme, že součin charakteristických funkcí dvou množin je charakteristická funkce jejich průniku.

- Integrál z jednoduché funkce: Jde o analogii horního a dolního součtu. „Objem oblasti pod grafem“se počítá pomocí zobecněných hranolů s podstavou A_j a výškou c_j (pokud je $c_j < 0$, započítáváme je se záporným znaménkem).

  Pro funkci jedné proměnné jde o zobecněné obdélníky. Na obrázcích jsou barevně vyznačeny pro dvě výše uvedené funkce.



- Ve vzorci se používá konvence, že $0 \cdot (+\infty) = 0$.

  To znamená například, že obsah „obdélníka“, jehož jehož výška je nulová, je nula, i kdyby měl nekonečnou šířku.

  Jinými slovy, integrál z konstantní nulové funkce má být nulový.

  (Tuto konvenci je třeba odlišovat od konvencí používaných ve větě o aritmetice limit.)

- Dále je v definici předpoklad, že příslušný součet má smysl.

  Pokud uvedené množiny $A_1, \dots, A_k$ mají konečnou míru, pak vše smysl má, protože jde o běžné aritmetické operace s reálnými čísly.

  Ale může se stát, že některé z množin mají nekonečnou míru. Pokud $\lambda_n(A_j) = +\infty$, pak

$$c_j \cdot \lambda_n(A_j) = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } c_j > 0, \\ -\infty & \text{pokud } c_j < 0, \\ 0 & \text{pokud } c_j = 0 \text{ (v souladu s uvedenou konvencí).} \end{cases}$$

  Součet tedy nemá smysl v případě, že dvě z množin mají nekonečnou míru, přičemž na jedné má funkce kladnou hodnotu a na druhé zápornou.

K obecným měřitelným funkcím:

- Integrace jednoduchých funkcí je jednoduchá, ale je to jen první krok. V praxi potřebujeme počítat integrály z obecnějších funkcí.

  Proto nejprve zavádíme měřitelné funkce, jakožto dostatečně bohatý systém funkcí, pro něž má smysl počítat Lebesgueův integrál.

- Ve Větě VIII.31 jsou uvedeny tři ekvivalentní definice měřitelných funkcí. Obsahem věty je právě skutečnost, že jsou ekvivalentní.

  Asi nejčastěji se v literatuře jako definice měřitelnosti objevuje podmínka (3), ale všechny podmínky se používají.

- Zdůrazněme, že měřitelné funkce mohou nabývat hodnot z $\mathbf{R}^*$, tedy i $+\infty$ nebo $-\infty$. (To je užitečné k tomu, aby více výpočtů mělo smysl.)

  Většinou se požaduje, aby množina, na které funkce nabývá hodnoty $+\infty$ nebo $-\infty$, byla nulová. To je také celkem běžná situace.

- Proberme jednotlivé body Věty VIII.31 a naznačme důkaz příslušných implikací.

  Bod (3): Ve znění se objevuje pojem otevřené množiny v $\mathbf{R}^*$, který nebyl definován.

  Nicméně definice je přirozená - množina je otevřená, pokud každý bod je vnitřní, tj., s každým bodem množina obsahuje i nějaké jeho okolí.

Přitom okolí bodů z $\mathbf{R}$ jsou ta známá, okolí $+\infty$ jsou intervaly tvaru $(c, +\infty\rangle$ pro $c \in \mathbf{R}$ a okolí $-\infty$ jsou intervaly tvaru $\langle -\infty, c)$ pro $c \in \mathbf{R}$.

(3)⇒(2): Tato implikace je triviální, protože

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) > c\} &= f^{-1}((c, +\infty\rangle),\\ \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) < c\} &= f^{-1}(\langle -\infty, c))\end{aligned}$$

a množiny $(c, +\infty\rangle$ a $\langle -\infty, c)$ jsou otevřené v $\mathbf{R}^*$.

(2)⇒(3): Pokud platí (2), pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ je $f^{-1}((c, +\infty\rangle) \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $f^{-1}(\langle -\infty, c)) \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a navíc pro každý otevřený interval $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je

$$f^{-1}((a, b)) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) > a\} \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) < b\} \in \widetilde{\mathcal{B}}_n.$$

Tedy vzor každého otevřeného intervalu v $\mathbf{R}^*$ patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$. Zbývá si uvědomit, že každá otevřená množina je sjednocením nějaké posloupnosti otevřených intervalů a použít bod (3) Věty VIII.29.

(1)⇒(2): Nechť $\{g_k\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí a $g_k(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. Pak z vlastností limit posloupností plyne, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) > c\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=k}^{\infty} \underbrace{\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon g_l(\boldsymbol{x}) > c + \tfrac{1}{m}\}}_{\in \widetilde{\mathcal{B}}_n}$$

(2)⇒(1): Naznačíme, jak funkci splňující podmínku (2) aproximovat pomocí jednoduchých funkcí.

Zvolme reálná čísla $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ a pro $j = 1, \ldots, m$ označme

$$A_j = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) > c_j\}.$$

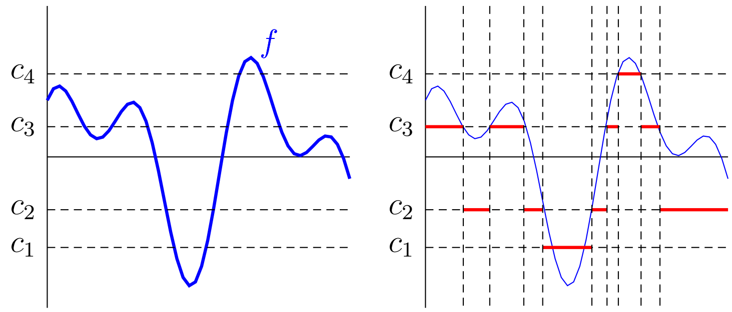
Podle předpokladu jsou tyto množiny měřitelné (tj. patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$). Definujme funkci u předpisem

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} c_m & \boldsymbol{x} \in A_m,\\ c_j & \boldsymbol{x} \in A_{j+1} \setminus A_j, j \in \{2, \ldots, m-1\},\\ c_1 & \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus A_2. \end{cases}$$

Pak u je jednoduchá funkce, protože ji lze vyjádřit ve tvaru

$$u = c_m \chi_{A_m} + c_{m-1}\chi_{A_m \setminus A_{m-1}} + \cdots + c_2 \chi_{A_3 \setminus A_2} + c_1 \chi_{\mathbf{R}^n \setminus A_2}.$$

Tuto konstrukci ilustrují obrázky (vzniklá jednoduchá funkce je na druhém obrázku vyznačena červeně):



Nyní, pokud chceme najít posloupnost jednoduchých funkcí, která konverguje k f v uvedeném smyslu, pak m-tou funkci můžeme získat výše uvedenou konstrukcí pro čísla

$$-m, -m + \frac{1}{m}, -m + \frac{2}{m}, \ldots m - \frac{1}{m}, m,$$

tedy začneme s $c_1 = -m$ a postupujeme vzhůru po $\frac{1}{m}$ až k m.

- Věta VIII.32 shrnuje základní vlastnosti měřitelných funkcí. Probereme jednotlivé body:

  (1): Spojité funkce splňují podmínku (2) z Věty VIII.31, protože uvedené množiny jsou dokonce otevřené, jak víme z Kapitoly V.

  (2): Tyto vlastnosti plynou z věty o aritmetice limit s využitím podmínku (1) z Věty VIII.31. (A toho, že násobek jednoduché funkce je jednoduchá funkce a že, máme-li dvě jednoduché funkce, pak jejich součet, součin, maximum i minimum jsou jednoduché funkce.)

  (3): Připomeňme, že $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ a $f = f^+ - f^-$ (viz kapitola VII pro podrobnosti). Tvrzení tedy plyne z (2).

  (4): Použijeme bod (2) z Věty VIII.31 a vlastnosti nulových množin.

Platí totiž

$$\{\boldsymbol{x}\colon g(\boldsymbol{x}) > c\} = (\{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) > c\} \setminus \underbrace{\{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) > c, g(\boldsymbol{x}) \leq c\}}_{\subset E}) \cup \underbrace{\{x\colon f(x) \leq c, g(x) > c\}}_{\subset E}$$

Protože E je nulová množina, podle Věty VIII.30(b) je každá její podmnožina také nulová, speciálně měřitelná. Tedy s použitím Věty VIII.29(4) vidíme, že $\{\boldsymbol{x}\colon g(\boldsymbol{x}) > c\}$ je měřitelná.

(5): Toto se dokáže postupem z důkazu implikace (1)⇒(2) ve Větě VIII.31.

(6): Toto je věta o měřitelnosti složené funkce. Dá se dokázat například s použitím bodu (1) z Věty VIII.31. Stačí si uvědomit, že, jsou-li $g_1, \dots, g_k$ jednoduché, je i složená funkce jednoduchá a následně použít Heineho charakterizaci spojitosti.

K definici Lebesgueova integrálu:

- Nyní jsme již připraveni definovat Lebesgueův integrál. Dělá se to ve třech krocích.

  První krok spočívá v definici pro jednoduché funkce. To jsme již udělali.

- Druhý krok je definice pro nezáporné měřitelné funkce.

  Pro ně je definice podobná definici dolního Riemannova integrálu (který je supremem dolních součtů přes všechna dělení intervalu).

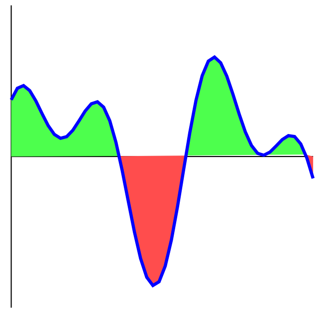
  Zde místo dělení intervalu uvažujeme jednoduché funkce, které se vejdou pod f (místo dělení na intervaly dělíme na měřitelné množiny).

  Lebesgueův integrál je definován pro každou nezápornou měřitelnou funkci, může být ovšem roven $+\infty$.

- Třetí krok je definice pro obecné měřitelné funkce. Ten spočívá v tom, že si funkci vyjádříme ve tvaru $f = f^+ - f^-$.

  Tedy vezmeme nezápornou část (pro funkce jedné proměnné je to část nad osou x), spočteme její integrál (plochu pod grafem), pak nekladnou část (pod osou x), spočteme její integrál (plochu nad grafem) a výsledné hodnoty odečteme.

Ilustrujeme to na obrázku - spočteme obsah zelené části a odečteme obsah červené části.



Může se stát, že integrál nemá smysl – pokud oba integrály vyjdou $+\infty$.

- Podobně jako pro zobecněný Riemannův integrál či pro řady rozlišujeme existenci a konvergenci:
  - Pokud integrál má smysl (ať už roven reálnému číslu nebo $+\infty$ nebo $-\infty$), říkáme, že integrál existuje, nebo že f má Lebesgueův integrál.
  - Pokud integrál existuje a navíc je roven reálnému číslu, říkáme, že integrál konverguje, případně, že f je integrovatelná.
  - Pokud integrál existuje a je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že integrál diverguje.
  - Pokud integrál nemá smysl, říkáme, že neexistuje, případně, že f nemá Lebesgueův integrál.

    To nastane v případě, že integrál z f^+ i z f^- je roven $+\infty$.

- Lebesgueův integrál se uvažuje nejen přes celý prostor, ale i přes menší množiny.

  Pokud funkce f není definována na celém $\mathbf{R}^n$, ale jen na nějaké měřitelné množině A, pak si ji představujeme, jako by byla definovaná na $\mathbf{R}^n$, přičemž mimo množinu A je rovna nule.

- Pokud chceme f integrovat přes menší měřitelnou množinu B, integrujeme součin $f \cdot \chi_B$ (tedy funkci, která na B je rovna f a mimo B nule).