K oddílu VIII.7 – vlastnosti a metody výpočtu Lebesgueova integrálu

Celkové poznámky k významu tohoto oddílu:

- V předchozím oddílu jsme definovali Lebesgueovu míru a Lebesgueův integrál. Definice byly alespoň v nějakém souladu s intuicí.

  Nicméně předchozí oddíl nám neříká nic o tom, jak Lebesgueův integrál počítat a používat. Tomu se budeme věnovat v tomto oddílu.

- Věty z tohoto oddílu většinou nebudeme dokazovat, důkazy jsou dlouhé či používají metody mimo rámec Matematiky III. Jen někdy naznačíme základní myšlenku na intuitivní úrovni.

  Více se budeme věnovat pochopení toho, co věty říkají a jak se používají.

K Větě VIII.33:

- Tato věta dává první metodu výpočtu – pro nezáporné spojité funkce na otevřeném intervalu je Lebesgueův integrál totéž, co zobecněný Riemannův integrál, dá se tedy počítat pomocí primitivní funkce.

- Je-li f nezáporná spojitá funkce na (a, b), pak její zobecněný Riemannův integrál existuje (viz doplňující cvičení k oddílům VIII.3 a VIII.5). Lebesgueův integrál též existuje, protože f je nezáporná a měřitelná. Tato věta říká, že se rovnají.

- Nerovnost „$\geq$“ je snadná: Protože je $f \geq 0$, je snadno vidět, že zobecněný Riemannův integrál přes (a, b) je roven supremu Riemannových integrálů přes uzavřené podintervaly. Tyto Riemannovy integrály lze vyjádřit jako supremum dolních součtů. Každý dolní součet lze ovšem interpretovat jako Lebesgueův integrál z jisté jednoduché funkce. A pomocí suprema takovýchto integrálů se definuje Lebesgueův integrál z f.

- Nerovnost „$\leq$“ není snadná. Je možné ji dokázat buď z definice s použitím regularity Lebesgueovy míry, nebo pomocí analogie Věty VIII.7 pro Lebesgueův integrál nebo s použitím Věty VIII.36.

- V této větě je podstatné, že $f \geq 0$, pro obecné spojité funkce neplatí.

  Vysvětleme to:

  Lebesgueův integrál z f je definován jako rozdíl integrálu z f^+ a integrálu z f^-, pokud ten rozdíl je definován.

  Přitom f^+ a f^- jsou nezáporné spojité funkce, proto pro ně Lebesgueův integrál splývá se zobecněným Riemannovým.

  Ale může se stát, že zobecněný Riemannův integrál z f konverguje (je konečný), i když integrály z f^+ a f^- jsou oba $+\infty$ (viz doplňující cvičení k oddílům VIII.3 a VIII.5). V takovém případě zobecněný Riemannův integrál existuje, ale Lebesgueův nikoli.

  Nicméně, z této úvahy plyne, že pokud (pro spojitou f) Lebesgueův integrál existuje, pak musí existovat i zobecněný Riemannův a rovnají se.

K pojmu platnosti „skoro všude“, Větě VIII.34 atd.

- Při aplikacích Lebesgueova integrálu se často objevuje situace, kdy nějaké tvrzení (rovnost, nerovnost atp.) nemusí platit v každém bodě, ale množina bodů, v nichž neplatí, je velmi malá – totiž nulová.

  Pro tuto situaci zavádíme pojem, že ono tvrzení platí „ve skoro všech bodech“ (krátce „skoro všude).

- Věta VIII.34 říká, že chování funkce na nulové množině při počítání integrálu nehraje roli.

  Vysvětleme si, proč to platí:

  - Bod (i): Nechť $f = 0$ skoro všude. Postupujeme ve třech krocích:
    Krok 1: f je jednoduchá funkce, tj. $f = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \cdots + c_k\chi_{A_k}$, kde $A_1, \dots, A_k$ jsou disjunktní měřitelné množiny a $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$.

    Pokud $f = 0$ skoro všude, pak to znamená, že pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ je buď A_j nulová nebo $c_j = 0$. Podle definice Lebesguova integrálu pro jednoduché funkce je integrál nulový.

    Krok 2: $f \geq 0$. Pak integrál z f je definován jako supremum integrálů z jednoduchých funkcí g splňujících $0 \leq g \leq f$.

Každá taková g je ovšem skoro všude rovna nule (alespoň všude tam, kde f), tedy podle Kroku 1 má nulový integrál. I zmíněné supremum je tedy 0.

Krok 3: f obecná. Pak funkce f^+ i f^- jsou skoro všude rovny nule (alespoň všude tam, kde f), tedy podle Kroku 2 mají nulový integrál. Tedy $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$.

– Bod (ii) se dokáže podobně, ale podrobně to už dělat nebudeme (přesný důkaz z definice by nebyl krátký). Také to plyne z bodu (i) s použitím bodu (2) z Věty VIII.35 (z té varianty s rovností všude).

- Důkaz bodu (i) je ilustrací metody dokazování vět o Lebesgueově integrálu ve třech krocích.
- Věta VIII.34 umožňuje zavést a používat užitečnou konvenci:

  Víme, že integrál nezávisí na chování funkce na nulové množině. Proto nám nevadí ani když funkce na nějaké nulové množině není vůbec definována.

  Proto se mohou uvažovat funkce „definované skoro všude“ a je možné s nimi pracovat, jako by byly definované všude (například, jako by na té chybějící množině měly hodnotu 0).

K Větě VIII.35:

- Tato věta shrnuje základní vlastnosti Lebesgueova integrálu. Tyto vlastnosti se často používají při výpočtech i jindy.

  Jejich důkazy nejsou těžké, dělají se ve třech krocích jako důkaz bodu (i) Věty VIII.34.

  Nebudeme důkazy dělat podrobně, ale stručně naznačíme jejich myšlenky.
- Nejprve si uvědomme, že můžeme předpokládat, že $A = \mathbf{R}^n$.

  Stačí totiž uvažovat modikované funkce f a g (na množině A mají svou původní hodnotu, mimo množinu A jsou nulové).

  Nyní probereme jednotlivé body.

(3): Krok 1: f, g nezáporné: Pokud $0 \leq f \leq g$, pak přímo z definice plyne, že $\int f \leq \int g$, protože oba integrály jsou definovanány jako supremum jisté množiny, přičemž množina příslušná funkci f je podmnožinou množiny příslušné funkci g.

Krok 2: f, g obecné. Pokud $f \leq g$, pak $0 \leq f^+ \leq g^+$ a $0 \leq g^- \leq f^-$. Podle Kroku 2 platí $\int f^+ \leq \int g^+$ a $\int g^- \leq \int f^-$. Odečtením dostaneme

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^- = \int g.$$

(5): Krok 1: $f \geq 0$. Pak $\int_B f = \int \chi_B f$. Funke $\chi_B f$ je nezáporná a měřitelná, proto integrál existuje. Navíc $0 \leq \chi_B f \leq f$, tedy podle bodu (3) je

$$\int_B f = \int \chi_B f \leq \int f.$$

Tedy, je-li f integrovatelná (tj. má konečný integrál), je integrovatelná i $\chi_B f$.

Krok 2: f obecná. Platí $(\chi_B f)^+ = \chi_B \cdot f^+$ a $(\chi_B f)^- = \chi_B \cdot f^-$. Pokud f má Lebesgueův integrál, pak podle definice je alespoň jedna z funkcí f^+, f^- integrovatelná. Podle Kroku 1 pak aspoň jedna z těchto funkcí je integrovatelná přes množinu B, a tedy f má Lebesgueův integrál přes B.

Pokud f je dokonce integrovatelná, jsou integrovatelné obě funkce f^+ a f^-. Podle Kroku 1 jsou integrovatelné i přes B, tedy f je integrovatelná přes B.

(6): Podle bodu (5) všechny zúčastněné integrály existují.

Krok 1: Je-li f jednoduchá, plyne tvrzení snadno z vlastností Lebesgueovy míry (konkrétně z bodu (6) Věty VIII.29).

Krok 2: Je-li f nezáporná, plyne tvrzení z kroku 1, definice pomocí pečlivé práce se supremy.

Krok 3: f obecná. Podle Kroku 2 je

$$\int_{\bigcup_k B_k} f^+ = \sum_k \int_{B_k} f^+ \text{ a } \int_{\bigcup_k B_k} f^- = \sum_k \int_{B_k} f^-.$$

Protože f má Lebesgueův integrál, je aspoň jeden z těchto výrazů konečný, proto je můžeme odečíst a přeuspořádat

$$\int_{\bigcup_k B_k} f = \int_{\bigcup_k B_k} f^+ - \int_{\bigcup_k B_k} f^- = \sum_k \int_{B_k} f^+ - \sum_k \int_{B_k} f^-$$
$$= \sum_k (\int_{B_k} f^+ - \int_{B_k} f^-) = \sum_k \int_{B_k} f$$

(1): Krok 1: Pro jednoduché funkce je tvrzení zřejmé z definice.

Krok 2: Pokud $f \geq 0$ a $\alpha > 0$, pak tvrzení plyne z definice a vlastností suprema.

Krok 3: Pokud $\alpha > 0$, plyne tvrzení z Kroku 2 a toho, že $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ a $(\alpha f)^- = \alpha f^-$.

Pokud $\alpha < 0$, stačí si uvědomit, že $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ a $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$.

(4): Nechť f je integrovatelná. To znamená, že $\int f^+$ i $\int f^-$ jsou reálná (nezáporná) čísla. Protože $|f| = f^+ + f^-$ je nezáporná měřitelná funkce, určitě má Lebesgueův integrál.

Označme

$$B_1 = \{\boldsymbol{x} \colon f(\boldsymbol{x}) > 0\} \text{ a } B_2 = \{\boldsymbol{x} \colon f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}.$$

Pak B_1 a B_2 jsou dvě disjunktní měřitelné množiny. Tedy podle bodu (6) platí

$$\int |f| = \int_{B_1} |f| + \int_{B_2} |f| = \int_{B_1} f^+ + \int_{B_2} f^- = \int f^+ + \int f^-,$$

což je reálné číslo. Proto je $|f|$ integrovatelná.

Nerovnost plyne z bodů (3) a (1) (pro $\alpha = -1$) podobně jako pro Riemannův či zobecněný Riemannův integrál.

(2): Krok 1: Pro jednoduché funkce je tvrzení snadné, i když není vidět zcela na první pohled. Stačí si však uvědomit, že pokud

$$f = c_1 \chi_{A_1} + \cdots + c_k \chi_{A_k} \text{ a } g = d \chi_B,$$

pak

$$f+g = c_1\chi_{A_1\setminus B}+(c_1+d)\chi_{A_1\cap B}+\dots c_k\chi_{A_k\setminus B}+(c_k+d)\chi_{A_k\cap B}+d\chi_{B\setminus(A_1\cup\dots\cup A_k)}$$

a v tomto případě tvrzení platí

Krok 2: Pro nezáporné funkce lze tvrzení dokázat s použitím Kroku 1, definice a pečlivé práce se supremy.

Krok 3: f, g obecné. Rozdělíme si prostor podle znamének na šest částí:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) \geq 0, g(\boldsymbol{x}) \geq 0\},\\
B_2 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) \geq 0, g(\boldsymbol{x}) < 0, f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \geq 0\},\\
B_3 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) \geq 0, g(\boldsymbol{x}) < 0, f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) < 0\},\\
B_4 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) < 0, g(\boldsymbol{x}) \geq 0, f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \geq 0\},\\
B_5 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) < 0, g(\boldsymbol{x}) \geq 0, f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) < 0\},\\
B_6 &= \{\boldsymbol{x}\colon f(\boldsymbol{x}) < 0, g(\boldsymbol{x}) < 0\}.
\end{aligned}$$

Podle bodu (6) stačí dokázat rovnost $\int_{B_j}(f+g) = \int_{B_j} f + \int_{B_j} g$ pro každé $j = 1, \dots, 6$. (Přitom z bodu (5) plyne, že integrály vpravo existují a jejich součet je definován.)

Pro množinu B_1 to plyne z Kroku 2, pro množinu B_6 z Kroku 2 a bodu (1) pro $\alpha = -1$.

Pro množinu B_2 z Kroku 2 a bodu (1) pro $\alpha = -1$ dostaneme

$$\int_{B_2} f = \int_{B_2} (f+g) + \int_{B_2} (-g) = \int_{B_2} (f+g) - \int_{B_2} g.$$

($\int_{B_2}(f+g)$ existuje, protože $f+g$ je nezáporná měřitelná funkce na B_2.) Tedy

$$\int_{B_2} (f+g) = \int_{B_2} f + \int_{B_2} g,$$

protože součet vpravo je definován.

Pro zbylé množiny je důkaz analogický.

- Poznámka o verzích všude a skoro všude:

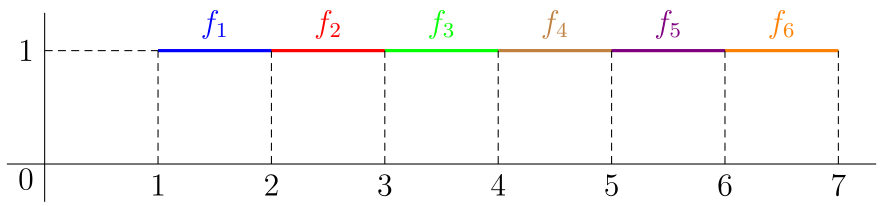
  Výše uvedené důkazy byly pro verzi s rovnostmi všude. Z bodu (2) a Věty VIII.34(i) plyne bod (ii) Věty VIII.34. Z toho pak plynou verze s rovností skoro všude.

K Větám VIII.36 a VIII.37:

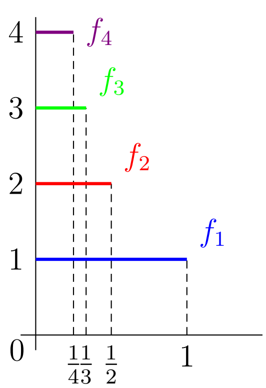
- Tyto dvě věty se týkají vztahu integrálu a limit. Konkrétně říkají, že za jistých předpokladů platí
$$\int_A \lim f_k = \lim \int_A f_k,$$
tedy, že lze prohodit limitu a integrál.

- Obecně limitu a integrál prohodit nelze. O tom svědčí následující příklady:

  1. Nechť $f_k = \chi_{(k,k+1)}$. Pak $f_k(x) \to 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ a přitom $\int_{\mathbf{R}} f_k = 1$. Tedy
  $$\lim \int_{\mathbf{R}} f_k = 1 \neq 0 = \int_{\mathbf{R}} \lim f_k.$$
  Prvních šest funkcí z této posloupnosti je vyznačeno na obrázku (barevně je vyznačena jenom ta část grafu, kde funkce není nulová, na zbytku $\mathbf{R}$ je funkce vždy rovna nule).

  2. Nechť $f_k = k \cdot \chi_{(0,\frac{1}{k})}$. Pak Pak $f_k(x) \to 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ a přitom $\int_{\mathbf{R}} f_k = 1$. Tedy
  $$\lim \int_{\mathbf{R}} f_k = 1 \neq 0 = \int_{\mathbf{R}} \lim f_k.$$

  První čtyři funkce z této posloupnosti jsou vyznačeny na obrázku (barevně je vyznačena jenom ta část grafu, kde funkce není nulová, na zbytku $\mathbf{R}$ je funkce vždy rovna nule).

- Jsou tedy důležité předpoklady těchto vět. Vysvětleme si je:

  Věta VIII.36: V tomto případě předpokládáme, že funkce f_k jsou nezáporné a že pro (skoro) každé $\boldsymbol{x}$ je posloupnost $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ neklesající, tj.

  $$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \qquad \text{(skoro všude)}$$

  Z Věty VIII.35(3) pak víme, že

  $$0 \leq \int_A f_1 \leq \int_A f_2 \leq \int_A f_3 \leq \dots,$$

  takže věta vlastně říká, že

  $$\int_A f = \sup_k \int_A f_k.$$

  Takto se také věta dá dokázat (ale dělat to nebudeme).

  Věta VIII.37: V tomto případě předpokládáme, že funkce f_k „nejsou moc velké“. Přesněji, že existuje nezáporná integrovatelná funkce g (tj. $g \geq 0$ a $\int_A g < +\infty$), která majorizuje všechny funkce f_k (tj. pro každé k platí $|f_k| \leq g$ (skoro všude) na A).

  Funkci g říkáme „integrovatelná majoranta“.

  Speciální důležitý případ je situace, kdy A má konečnou míru ($\lambda_n(A) < +\infty$) a funkce f_k jsou stejně omezené na A (tj. všechny jsou omezené stejným číslem). Neboli, existuje $c > 0$, že pro každé k platí $|f_k| \leq c$ na A.

  V tomto případě funkci integrovatelné majoranty plní konstantní funkce rovna c, protože $\int_A c = c\lambda_n(A) < +\infty$.

  Důkaz provádět nebudeme, udělá se tak, že to vhodným trikem redukujeme na Větu VIII.36.

- Všimněme si, že v uvedených příkladech opravdu nebyly splněny předpoklady žádné ze dvou vět.

K Větě VIII.38:

- Tato věta umožňuje redukovat výpočet integrálů z funkcí více proměnných na výpočet integrálů z funkcí méně proměnných.

  Nakonec tedy výpočet můžeme redukovat na postupný výpočet několika integrálů funkcí jedné proměnné.

- Věta má vlastně jediný předpoklad – je třeba, aby funkce f byla měřitelná a měla Lebesgueův integrál (konečný či nekonečný).

  Tvrzení věty na první pohled vypadá komplikovaně, ale vpodstatě říká, že vzorec ve třetím bodě funguje:

  První bod říká, že vnitřní integrál $\int_{\mathbf{R}^l} f_{\boldsymbol{x}}\, d\lambda_l$ existuje pro skoro všechna $\boldsymbol{x}$, tj. funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^l} f_{\boldsymbol{x}}\, d\lambda_l$ je definována skoro všude.

  Druhý bod říká, že tato funkce je měřitelná, a tedy má smysl počítat její integrál.

  Třetí bod pak říká, že tento integrál existuje a rovná se integrálu z f přes $\mathbf{R}^{k+l}$.

- Důkaz provádět nebudeme, jen krátce okomentujeme. Klíčový je první krok – dokázat, že to platí, pokud f je charakteristická funkce nějaké měřitelné množiny. To se dělá důkladnou analýzou konstrukce Lebesgueovy míry, přičemž se vyjde z toho, že pro kvádry tvrzení platí (viz bod (a) Věty VIII.28).

  Pokud tvrzení platí pro charakteristické funkce, snadno se odvodí pro jednoduché funkce. Pak pečlivou prací se supremy pro nezáporné funkce, poslední krok je pak snadný.

- Věta je formulována pro integrál z funkce přes celé $\mathbf{R}^{k+l}$. Lze použít i pro integrál přes menší množinu – a to zřejmým způsobem, protože integrál z f přes A je definován jako integrál z $\chi_A \cdot f$ přes $\mathbf{R}^{k+l}$.

- Několik příkladů použití:

  1. $\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2 :\, x>0, y>0\}} e^{-x-y}\, dx\, dy$:
     Máme $f(x,y) = \chi_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2 :\, x>0, y>0\}} e^{-x-y}$. To je nezáporná měřitelná funkce na $\mathbf{R}^2$ (je to součin spojité funkce a charakteristické funkce otevřené množiny).

Pro $x \leq 0$ je funkce $f_x(y) = f(x,y)$ konstantní nulová funkce, a tedy $\int_{\mathbf{R}} f_x = 0$.
Pro $x > 0$ je $f_x(y) = \chi_{(0,+\infty)} e^{-x-y}$, a tedy

$$\int_{\mathbf{R}} f_x = \int_{\mathbf{R}} \chi_{(0,+\infty)} e^{-x-y}\, dy = \int_{(0,+\infty)} e^{-x-y}\, dy \overset{VIII.33}{=} (ZR) \int_0^{\infty} e^{-x-y}\, dy$$
$$\overset{VIII.25}{=} [-e^{-x-y}]_0^{+\infty} = \lim_{y \to +\infty} -e^{-x-y} - \lim_{y \to 0+} -e^{-x-y} = 0 - (-e^{-x}) = e^{-x}.$$

Tedy podle Věty VIII.38 je

$$\int_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} f_x)\, dx = \int_{(0,+\infty)} e^{-x}\, dx \overset{VIII.33}{=} (ZR) \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$$
$$\overset{VIII.25}{=} [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

O něco málo jednodušší postup: Máme $f(x) = e^{-x-y}$ a $A = \{(x,y) \colon x > 0, y > 0\}$ a chceme spočítat $\int_A f$.
Místo, abychom uvažovalu f na celém $\mathbf{R}^2$ vynásobenou charakteristickou funkcí A, můžeme vzorec přepsat takto:

$$\int_A f = \int_{\mathbf{R}} (\int_{A_x} f_x)\, dx,$$

kde

$$A_x = \{y \in \mathbf{R} \colon (x,y) \in A\}.$$

To je jen jiný zápis třetího bodu tvrzení věty pro tento případ.
Přitom pro $x \leq 0$ je $A_x = \emptyset$, tedy $\int_{A_x} f_x = 0$.
Pro $x > 0$ je $A_x = (0,+\infty)$, a tedy

$$\int_{A_x} f_x = \int_{(0,+\infty)} f_x = e^{-x} \text{ jako výše.}$$

Proto stejně jako výše dostaneme

$$\int_A f = \int_{(0,+\infty)} e^{-x}\, dx = 1.$$

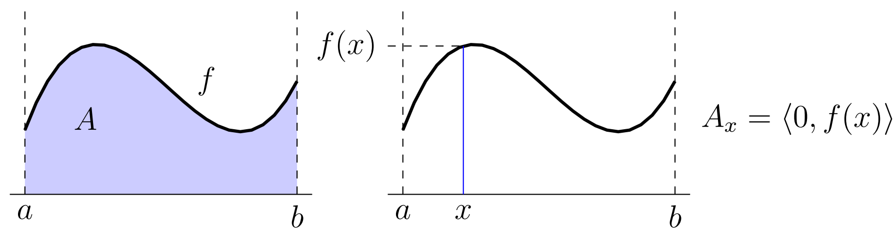
2. Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Označme

$$A = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon x \in (a, b), 0 \le y \le f(x)\},$$

tj. A je plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu (a, b). Pak A je borelovská množina a

$$\lambda_2(A) = (ZR) \int_a^b f.$$

Na prvním obrázku je vyznačena množina, jejíž míru chceme spočítat.



Protože f je spojitá, množina A vyjde borelovská (pás $P = \{[x, y] \colon x \in (a, b)\}$ je otevřená množina, $B_1 = \{[x, y] \in P \colon y > f(x)\}$ a $B_2 = \{[x, y] \in P \colon y < 0\}$ jsou také otevřené množiny. Přitom $A = P \setminus (B_1 \cup B_2)$, tedy A je borelovská.

Platí $\lambda_2(A) = \int_A 1 = \int_{\mathbf{R}^2} \chi_A$. Protože χ_A je nezáporná měřitelná funkce, můžeme použít Větu VIII.38:

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus (a, b)$ je $A_x = \emptyset$, pro $x \in (a, b)$ je $A_x = \langle 0, f(x) \rangle$ (viz druhý obrázek).

Tedy podle Věty VIII.38 je

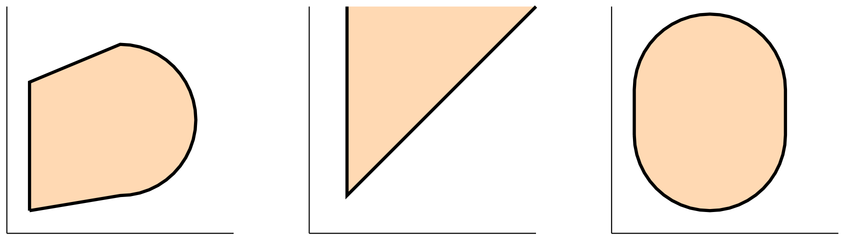
$$\begin{aligned} \lambda_2(A) &= \int_A 1 = \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{A_x} 1 \Big)\, dx = \int_{(a,b)} \Big(\int_{\langle 0, f(x) \rangle} 1 \Big)\, dx \\ &= \int_{(a,b)} \lambda_1(\langle 0, f(x) \rangle)\, dx = \int_{(a,b)} f(x)\, dx = (ZR) \int_a^b f. \end{aligned}$$

3. Nechť A je konvexní množina v $\mathbf{R}^2$. Pak $\lambda_2(H(A)) = 0$.

Hranice každé množiny je uzavřená množina, tedy $H(A)$ je borelovská, a tedy míra této množiny je definovaná.

Je $\lambda_2(H(A)) = \int_{H(A)} 1$. Použijeme Větu VIII.38.

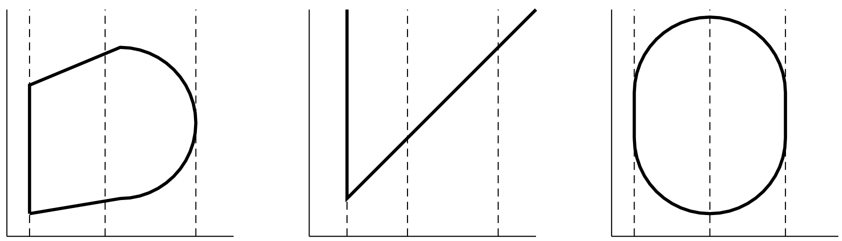
Následující obrázky obsahují příklady konvexních množin, jsou vyznačeny jejich hranice.



Podle Věty VIII.38 je

$$\lambda_2(H(A)) = \int_{H(A)} 1 = \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{H(A)_x} \Big) \, dx = \int_{\mathbf{R}} \lambda_1((H(A)_x) \, dx.$$

Podívejme se, jak mohou vypadat množiny $H(A)_x$.



Množina $H(A)_x$ může být prázdná (pokud přímka $\{[x, y] \colon y \in \mathbf{R}\}$ neprotíná množinu A – takové případy na obrázcích nastávají, i když nejsou vyznačeny, nebo pokud je tato přímka celá obsažena v A – to na obrázcích nenastává, ale nastat může, je-li A například svislý pás).

Množina $H(A)_x$ také může být jednobodová nebo dvoubodová (příklady jsou vyznačeny na obrázcích).

Nakonec může být množina $H(A)_x$ uzavřená interval (omezený či neomezený, nebo i celé $\mathbf{R}$ – první dvě možnosti jsou na obrázcích vyznačeny, třetí nikoli, nastane například, je-li A svislý pás).

Více možností není. Nyní je třeba si uvědomit, že množina $H(A)_x$ může mít více než dva body pouze pro dvě hodnoty x, a to největší a nejmenší hodnotu, pro které přímka $\{[x, y] \colon y \in \mathbf{R}\}$ zasahuje do množiny A.

Tedy, $H(A)_x$ je buď prázdná nebo jednobodová nebo dvoubodová pro všechna x až na nevýše dvě výjimky.

To ovšem znamená, že $\lambda_1(H(A)_x) = 0$ pro skoro všechna x. Tedy $\lambda_2(H(A)) = 0$ podle výše uvedeného vzorce a Věty VIII.34(i).

- Vraťme se ještě k předpokladům věty. Jak jsme poznamenali výše, je vlastně jediný předpoklad – aby f měla Lebesgueův integrál přes $\mathbf{R}^{k+l}$.

  To je splněno například, pokud f je nezáporná měřitelná funkce. Tak tomu bylo také ve všech zatím uvedených příkladech.

  Druhý důležitý případ, kdy je předpoklad splněn, je, když f je integrovatelná, tj. má konečný Lebesgueův integrál.

  Co však, když předem nevíme, zda f je integrovatelná? Pak je vhodnou metodou výpočet ve dvou krocích:

  Krok 1: Spočteme (či odhadneme) integrál z $|f|$. To je nezáporná měřitelná funkce, takže větu lze použít.

  Krok 2: Pokud integrál z prvního kroku vyjde konečný, víme, že f je integrovatelná, a tedy můžeme větu použít na výpočet integrálu z f.

- Ilustrujme tuto metodu na jednom příkladu:

  Spočtěme $\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\, x>0,y>0\}} e^{-x-y}\cos(x-y)\,dx\,dy$

  Máme $A=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\, x>0,y>0\}$ a $f(x,y)=e^{-x-y}\cos(x-y)$, počítáme $\int_A f$.

  A je otevřená a f spojitá (dokonce na celém $\mathbf{R}^2$), tedy měřitelná.

  Krok 1: Odhadněme $\int_A |f|$:

$$\int_A |f| = \int_A e^{-x-y}|\cos(x-y)|\,dx\,dy \le \int_A e^{-x-y}\,dx\,dy = 1.$$

  Nerovnost uprostřed plyne z Věty VIII.35(3), poslední rovnost z příkladu výše.

  Závěr z prvního kroku je, že f je integrovatelná přes množinu A.

  Krok 2: Vlastní výpočet $\int_A f$. Použijeme Větu VIII.38:

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_A e^{-x-y}\cos(x-y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_{A_x} e^{-x-y}\cos(x-y)\,dy\right)dx\\ &= \int_{(0,+\infty)}\left(\int_{(0,+\infty)} e^{-x-y}\cos(x-y)\,dy\right)dx\\ &= \int_{(0,+\infty)}\left((ZR)\int_0^{+\infty} e^{-x-y}\cos(x-y)\,dy\right)dx\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z Věty VIII.38 (používáme stejné značení jako výše). Třetí rovnost plyne z toho, že pro $x \leq 0$ je $A_x = \emptyset$ a pro $x > 0$ je $A_x = (0, +\infty)$. Poslední rovnost plyne z Věty VIII.33. (Tedy, přesněji, z této věty aplikované na f^+ a f^- a z toho, že víme, že příslušný Lebesgueův integrál existuje, jak bylo vysvětleno v komentáři k Větě VIII.33.)

Nyní spočteme vnitřní integrál v závislosti na x. K tomu použijeme metodu per partes (Věta VIII.26, derivujeme a integrujeme podle y):

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x-y} \cos(x-y)\, dy \underset{\substack{u'=e^{-x-y} \quad v=\cos(x-y) \\ u=-e^{-x-y} \quad v'=\sin(x-y)}}{=} & \underbrace{\left[-e^{-x-y}\cos(x-y)\right]_0^{+\infty}}_{=0-(-e^{-x}\cos x)} \\
& - \int_0^{+\infty} -e^{-x-y} \sin(x-y)\, dy \\
& = e^{-x}\cos x + \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\sin(x-y)\, dy \\
& \underset{\substack{u'=e^{-x-y} \quad v=\sin(x-y) \\ u=-e^{-x-y} \quad v'=-\cos(x-y)}}{=} e^{-x}\cos x + \underbrace{\left[-e^{-x-y}\sin(x-y)\right]_0^{+\infty}}_{=0-(-e^{-x}\sin x)} \\
& - \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\cos(x-y)\, dy \\
& = e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\cos(x-y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Odtud vidíme, že

$$
\int_0^{+\infty} e^{-x-y}\cos(x-y)\, dy = \frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x).
$$

Zbývá tedy spočítat

$$
\int_{(0,+\infty)} \frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x)\, dx = (ZR) \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x)\, dx
$$

Opět víme, že Lebesgueův integrál existuje, a tedy můžeme aplikovat Větu VIII.33 „na f^+ a f^-“. Tento integrál spočteme opět s využitím metody per partes.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\,dx \underset{\substack{u'=\frac{1}{2}e^{-x} \quad v=\cos x+\sin x \\ u=-\frac{1}{2}e^{-x} \quad v'=-\sin x+\cos x}}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]_0^{+\infty}}_{=0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}}$$

$$- \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)\,dx$$

$$\underset{\substack{u'=\frac{1}{2}e^{-x} \quad v=\cos x-\sin x \\ u=-\frac{1}{2}e^{-x} \quad v'=-\sin x-\cos x}}{=} \frac{1}{2} + \underbrace{\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)\right]_0^{+\infty}}_{=0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}}$$

$$- \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x - \cos x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{=1} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\,dx.$$

Tedy

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Závěr: Integrál ze zadání je roven $\frac{1}{2}$.

K Větě VIII.39

- Tato věta o substituci je jistou analogií Věty VIII.27 pro zobecněný Riemannův integrál. Protože se ovšem týká funkcí více proměnných, je formulace složitější.

- Základní předpoklady se týkají zobrazení φ. Proberme je:

  - φ je zobrazení definované na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ a má hodnoty také v $\mathbf{R}^n$.

    Navíc se předpokládá, že je prosté.

    (Ve Větě VIII.27 je φ definovaná na otevřeném intervalu (α, β) a je také prostá.)

  - Všech n složek zobrazení φ jsou funkce třídy C^1 na G, tj. mají spojité (ma G) parciální derivace prvního řádu.

    (Ve Větě VIII.27 se předpokládá, že φ má v každém bodě vlastní derivaci, zde předpokládáme navíc spojitost derivací.)

- Dále předpokládáme, že matice parciálních derivací (která má v prvním sloupci gradient první složky – tj. $\nabla\varphi_1$, ve druhém sloupci $\nabla\varphi_2$, atd.) je v každém bodě množiny G regulární.

  (Analogií tohoto předpokladu ve Větě VIII.27 by byla nenulovost derivace. Ve Větě VIII.27 tento předpoklad ovšem není nutný.)

- A nyní tvrzení věty:

  - První tvrzení je, že za těchto předpokladů je množina $\varphi(G)$, obraz množiny G při zobrazení φ, otevřená.

    Při výpočtech se tato část tvrzení obvykle nepoužije, ale může se hodit v teoretických úvahách.

  - Nakonec pro každou $f : \varphi(G) \to \mathbf{R}^*$ a každou měřitelnou $A \subset \varphi(G)$ je

    $$\int_A f = \int_{\varphi^{-1}(A)} f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi|.$$

    Tato rovnost platí, je-li alespoň jeden z integrálu definován – pak je definován i druhý a rovnají se.

    (Tato rovnost připomíná rovnost z Věty VIII.27 – místo absolutní hodnoty derivace je zde absolutní hodnota determinantu matice parciálních derivací. Věta VIII.27 se týká jen integrálu přes celý interval, dá se ovšem použít i na integrály přes menší intervaly. Věta VIII.39 se naproti tomu dá použít pro každou měřitelnou podmnožinu $A \subset \varphi(G)$.)

- Důkaz věty je obtížný a provádět ho nebudeme. Jen ho krátce okomentujeme. Jeho nejtěžší část je důkaz pro případ, kdy f je charakteristická funkce měřitelné množiny.

  To znamená, důkaz rovnosti

  $$\lambda_n(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det J_\varphi|, \quad A \subset \varphi(G) \text{ měřitelná.}$$

  Zbytek důkazu je pak snadný (nejprve se dokáže pro jednoduché funkce, pak pro nezáporné měřitelné a nakonec pro obecné měřitelné funkce).

- Ilustrujme si přirozenost této věty na jednoduchém případě:

  Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je regulární matice řádu 2 a $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{A}$.

  Pak φ je prosté zobrazení $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}^2$ (viz Věta VI.15 a VI.19).

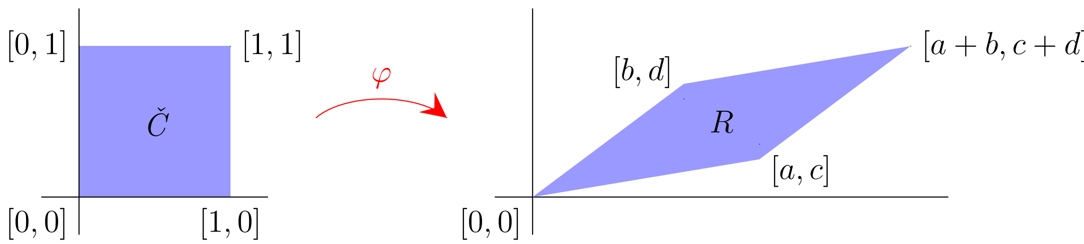
  Připomeňme, že

$$\varphi(x, y) = \mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

  Odsud je vidět, že složky zobrazení φ jsou třídy C^1 a matice parciálních derivací v každém bodě je

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mathbb{A}^T.$$

  Uvažme rovnoběžník s jedním vrcholem v počátku, jehož sousední vrcholy jsou body $[a, c]$ a $[b, d]$ (na obrázku vpravo).



  Obsah rovnoběžníku R je roven (viz oddíl VI.3)

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = |\det \mathbb{A}^T| = |\det \mathbb{A}|.$$

  Přitom $\varphi^{-1}(R) = \check{C}$, vzorem rovnoběžníku R při zobrazení φ je jednotkový čtverec $\check{C}$.

  Pokud použijeme Větu VIII.29, dostáváme

$$\lambda_2(R) = \int_{\check{C}} |\det J_\varphi| = \int_{\check{C}} |\det \mathbb{A}^T| = |\det \mathbb{A}^T| \cdot \underbrace{\lambda_2(\check{C}\,)}_{=1} = |\det \mathbb{A}^T|.$$

Věta o substituci dává tedy v tomto případě opravdu správný výsledek.

Obecněji z Věty VIII.29 v tomto případě plyne, že

$$\lambda_2(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det \mathbb{A}| = |\det \mathbb{A}| \cdot \lambda_2(\varphi^{-1}(A)), \quad A \subset \mathbf{R}^2 \text{ měřitelná.}$$

- Podobné vzorce platí, je-li $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineární zobrazení reprezentované regulární maticí $\mathbb{A}$ řádu n.
- Příklady použití:

1. $\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\, x>0, y>0\}} e^{-x-y}\, dx\, dy$:
   Tento příklad jsme počítali výše pomocí Fubiniovy věty (Věta VIII.38). Ukážeme si jiný způsob výpočtu:
   Definujme zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ předpisem

$$\varphi(u,v) = [u+v, u-v], \quad [u,v] \in \mathbf{R}^2.$$

   Pak φ je prosté zobrazení $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}^2$ (je to lineární zobrazení reprezentované regulární maticí; lze i spočítat inverzní zobrazení, je dáno vzorce $\varphi^{-1}(x,y) = [\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)]$).
   Matice parciálních derivací je rovna

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

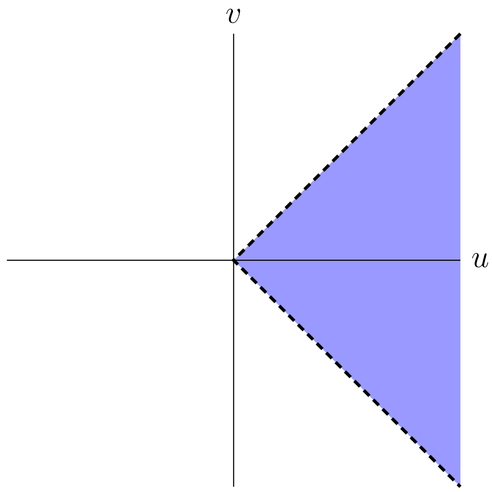
   je stejná ve všech bodech, je regulární a $\det J_\varphi(u,v) = -2$.
   Proto podle Věty VIII.39 dostaneme

$$\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\, x>0, y>0\}} e^{-x-y}\, dx\, dy = \int_{\varphi^{-1}(\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\, x>0, y>0\})} e^{-2u} \cdot |-2|\, du\, dv.$$

   Spočtěme příslušný vzor množiny:
   $\varphi(u,v) \in \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon x>0, y>0\} \Leftrightarrow u+v>0$ a $u-v>0$
   $\Leftrightarrow -u < v < u$
   Tedy

$$\varphi^{-1}(\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon x>0, y>0\}) = \{[u,v] \in \mathbf{R}^2 \colon -u < v < u\}$$

Tato množina je vyznačena na obrázku:



Označme tuto množinu B. Pak počítáme $\int_B 2e^{-2u}\,du\,dv$.
Použijeme k tomu Větu VIII.38 (integrujeme nezápornou měřitelnou funkci, takže můžeme).

$$\int_B 2e^{-2u}\,du\,dv = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{B_u} 2e^{-2u}\,dv \right) du = \int_{(0,+\infty)} \left(\int_{(-u,u)} 2e^{-2u}\,dv \right) du$$
$$= \int_{(0,+\infty)} 2e^{-2u} \cdot 2u\,du = (ZR) \int_0^{+\infty} 4ue^{-2u}\,du.$$

První rovnost plyne z Věty VIII.38 (používáme značení jako v příkladech výše).
Druhá rovnost plyne z toho, že $B_u = \emptyset$ pro $u \leq 0$ a $B_u = (-u, u)$ pro $u > 0$.
Třetí rovnost plyne z toho, že vnitřní integrál je vlastně integrál z konstantní funkce (integrovaná funkce nezávisí na v), a proto používáme vzorec pro integrál z jednoduché funkce.
Čtvrtá rovnost plyne z Věty VIII.33.
Nyní zbývá spočítat poslední integrál pomocí metody per partes:

$$\int_0^{+\infty} 4ue^{-2u}\,du = \underbrace{[-\tfrac{1}{2}e^{-2u} \cdot 4u]_0^{+\infty}}_{=0-0=0} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-2u} \cdot 4\,du$$
$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2u}\,du = [-e^{-2u}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Dostáváme (pochopitelně) stejný výsledek jako výše.

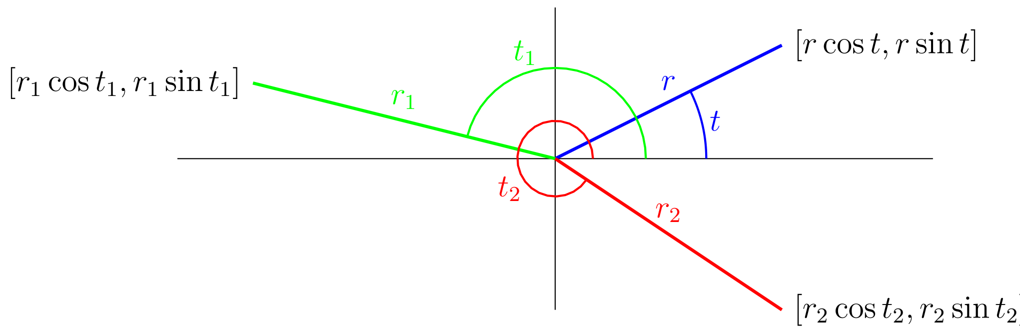
2. Polární souřadnice. Popíšeme jednu z často používaných substitucí.

   Nechť $G = \{[r,t] \in \mathbf{R}^2 \colon r > 0, t \in (0,2\pi)\}$. Pak G je zřejmě otevřená množina.

   Definujme $\varphi : G \to \mathbf{R}^2$ předpisem

   $$\varphi(r,t) = [r\cos t, r\sin t], \quad [r,t] \in G.$$

   Pak φ je prosté zobrazení G na $\mathbf{R}^2 \setminus \{[x,0] \colon x \geq 0\}$. Význam tohoto zobrazení je znázorněn na obrázku:

   Tedy, pokud $[x,y] = \varphi(r,t) = [r\cos t, r\sin t]$, pak r je vzdálenost bodu $[x,y]$ od počátku a t je velikost úhlu který svírá průvodič bodu $[x,y]$ s nezápornou polopřímkou na ose x.

   To je také důvod, proč v oboru hodnot chybí nezáporná polopřímka (v počátku by muselo být $r = 0$, na kladné poloose x by pak muselo být $t = 0$ (nebo násobek 2π) – to však na množině G není možné.

   Složky zobrazení φ jsou třídy C^1 a matice parciálních derivací je

   $$J_\varphi(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -r\sin t & r\cos t \end{pmatrix}, \quad [r,t] \in G.$$

   Tato matice je regulární, protože

   $$\det J_\varphi(r,t) = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r > 0.$$

   Tedy, podle Věty VIII.39 platí rovnost

   $$\int_A f = \int_{\varphi^{-1}(A)} r \cdot f(r\cos t, r\sin t)\, dr\, dt,$$

kdykoli $A \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{[x,0]\colon x \geq 0\}$ je měřitelná množina a $f : A \to \mathbf{R}^*$ (pokud aspoň jeden z integrálů existuje).

Poznámka: Protože vyloučená polopřímka je nulová množina, lze tento vzorec použít pro každou měřitelnou $A \subset \mathbf{R}^2$. Přesněji: Pokud $A \subset \mathbf{R}^2$ je měřitelná množina a $f : A \to \mathbf{R}^*$ je měřitelná funkce, pak

$$\int_A f = \int_{A\setminus\{[x,0]\colon x\geq 0\}} f = \int_{\varphi^{-1}(A\setminus\{[x,0]\colon x\geq 0\})} r\cdot f(r\cos t, r\sin t)\, dr\, dt,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

3. Použití polárních souřadnic na výpočet obsahu kruhu:

   Nechť $A = B([0,0],R)$ je otevřený kruh o středu v počátku a poloměru $R > 0$. Spočtěme $\lambda_2(A)$.

   Použijeme polární souřadnice:

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(A\setminus\{[x,0]\colon x \geq 0\}) = \int_{A\setminus\{[x,0]\colon x\geq 0\}} 1 = \int_{\varphi^{-1}(A\setminus\{[x,0]\colon x\geq 0\})} r\cdot 1\, dr\, dt,$$

   kde φ je zobrazení z definice polárních souřadnic.

   Nyní je třeba určit, jak vypadá uvedený vzor množiny:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(A \setminus \{[x,0]\colon x \geq 0\}) &= \{[r,t]\colon [r\cos t, r\sin t] \in A \setminus \{[x,0]\colon x \geq 0\}\}\\ &= \{[r,t]\colon [r\cos t, r\sin t] \in U([0,0],R)\}\\ &= \{[r,t]\colon r \in (0,R), t \in (0,2\pi)\}.\end{aligned}$$

   Tedy

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) &= \int_{\{[r,t]\colon r\in(0,R),t\in(0,2\pi)\}} r\, dr\, dt = \int_{(0,2\pi)} \left(\int_{(0,R)} r\, dr\right) dt\\ &= \int_{(0,2\pi)} \left((ZR)\int_0^R r\, dr\right) dt = \int_{(0,2\pi)} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R dt = \int_{(0,2\pi)} \frac{R^2}{2}\, dt\\ &= 2\pi\cdot\frac{R^2}{2} = \pi R^2.\end{aligned}$$

   První rovnost je výsledkem výše provedeného výpočtu, druhá rovnost plyne z Věty VIII.38 (integrujeme nezápornou měřitelnou funkci). Třetí rovnost plyne z Věty VIII.33. Další dvě rovnosti dávají výpočet vnitřního integrálu podle Věty VIII.25.

Předposlední rovnost plyne z definice Lebesgueova integrálu pro jednoduché funkce – integrujeme konstantní funkci přes interval $(0, 2\pi)$.

K Větě VIII.40:

(1): Toto tvrzení plyne přímo z definic, mj. z definice Lebesgueova integrálu pro jednoduché funkce.

Ale je dobré si tuto jednoduchou věc uvědomit.

(2): Pokud M je otevřená nebo uzavřená, je borelovská, a tedy měřitelná.

Pokud M je navíc omezená, pak $\lambda_n(M) < +\infty$. To je vidět například z toho, že pak existuje $R > 0$, že

$$M \subset \underbrace{\langle -R, R\rangle \times \langle -R, R\rangle \times \cdots \times \langle -R, R\rangle}_{n\text{-krát}}$$

a míra n-rozměrné krychle na pravé straně je $(2R)^n$ (viz Věta VIII.28(a)). Proto je míra množiny M konečná.

Dále je funkce f měřitelná na M. To je vidět například s použitím podmínky (2) z Věty VIII.31 a z vlastností spojitých funkcí:

Nechť $\tilde{f}$ je rozšíření f na $\mathbf{R}^n$ definované pomocí doplnění nulou. Pak

$$\{\boldsymbol{x} \colon \tilde{f}(\boldsymbol{x}) > c\} = \begin{cases} \{x \in M \colon f(x) > c\} & \text{pokud } c \geq 0, \\ \{x \in M \colon f(x) > c\} \cup (\mathbf{R}^n \setminus M) & \text{pokud } c < 0. \end{cases}$$

Přitom, je-li M otevřená, je

$$\{x \in M \colon f(x) > c\}$$

otevřená množina.

Je-li M uzavřená, je

$$\{x \in M \colon f(x) > c\} = M \setminus \{x \in M \colon f(x) \leq c\},$$

tedy je to rozdíl dvou uzavřených množin, a tedy měřitelná množina.

Z toho plyne, že f je opravdu měřitelná na M.

Pokud f je navíc omezená na M, znamená to, že existuje $C > 0$, že $|f| \leq C$ na M. Pak ovšem $f^+ \leq C$ i $f^- \leq C$ na M, tedy

$$\int_M f^+ \leq \int_M C = C\lambda_n(M)$$

a podobně

$$\int_M f^- \leq \int_M C = C\lambda_n(M).$$

Proto integrály z f^+ i z f^- jsou konečné, a tedy i $\int_M f$ existuje a je konečný. Proto je f integrovatelná na M.

(3): $\overline{M}$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Je-li f spojitá na $\overline{M}$, je tam omezená.

Podle bodu (2) je tedy f integrovatelná na $\overline{M}$, tedy i na M.

Rozdíl $\overline{M} \backslash M$ je roven $H(M)$, hranici množiny M. To je nulová množina (viz Věta VIII.30), tedy oba integrály se rovnají (podle Věty VIII.34 – funkce f a $\chi_M \cdot f$ se rovnají skoro všude).

(4): f je integrovatelná na M podle bodu (2), protože M je omezená otevřená množina.

Rovnost pak plyne postupnou aplikací Věty VIII.38.

Přesněji – z Věty VIII.38 plyne uvedený vzorec, pokud integrály chápeme jako Lebesgueovy integrály (přes intervaly (a_j, b_j)).

Nicméně je lze chápat i jako zobecněné Riemannovy, protože vždy integrujeme omezenou spojitou funkci (to není zřejmé, ale z vlastností Lebesgueova integrálu to plyne).