Komentář k oddílu VIII.3 – primitivní funkce

K úvodní části (před Větičkou VIII.11):

- Primitivní funkce byla definována v oddílu VIII.2, definice se zde jen připomíná. Hledání primitivní funkce je tedy inverzní úlohou k derivování.

- Ve Větě VIII.8 z oddílu VIII.2 bylo dokázáno, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má primitivní funkci. Připomeňme, že se to udělalo pomocí Riemannova integrálu (s použitím Věty VIII.7):

  Pokud f je spojitá na otevřeném intervalu I a $c \in I$, pak funkce

  $$F(x) = \int_c^x f, \quad x \in I,$$

  je primitivní funkce k f na I.

- Věta VIII.10 byla dokázána v druhé části komentářů k oddílu VIII.2. Zopakujme její jednoduchý důkaz:

  Nechť F a G jsou dvě primitivní funkce k f na I. Pak na intervalu I platí

  $$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

  tedy funkce $F - G$ je konstantní na I.

  To znamená, že existuje takové $c \in \mathbf{R}$, že $F - G = c$ na I, neboli $F = G + c$ na I.

  A to je přesně tvrzení Věty VIII.10.

- Ke značení $\int f(x)\,dx$:

  - Pokud f je funkce definovaná na otevřeném intervalu I, pak $\int f(x)\,dx$ značí **množinu všech primitivních funkcí k f**.
  - Množina může $\int f(x)\,dx$ být také prázdná – primitivní funkce nemusí existovat.

    Například, funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na $\mathbf{R}$.

Důkaz pro zájemce: Nechť F je primitivní funkce k funkci sgn *na* $\mathbf{R}$*. To znamená, že*

$$F'(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, +\infty) \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Tedy na $(0, +\infty)$ *platí* $F' = 1$*, proto z Věty 10 plyne, že existuje* $c \in \mathbf{R}$*, že* $F(x) = x + c$ *pro* $x \in (0, +\infty)$*.*
Analogicky na $(-\infty, 0)$ *platí* $F' = -1$*, proto z Věty 10 plyne, že existuje* $d \in \mathbf{R}$*, že* $F(x) = -x + d$ *pro* $x \in (-\infty, 0)$*.*
Protože $F'(0) = 0$*, tedy F má v nule vlastní derivaci, je F spojitá v bodě* 0*, neboli*

$$F(0) = \lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{x \to 0-} F(x),$$

tedy $c = d$*.*
Proto F musí mít tvar $F(x) = |x| + c$ *pro* $x \in \mathbf{R}$*. Tato funkce však nule nemá derivaci, což je spor.*

- Pokud je množina $\int f(x)\,dx$ neprázdná, tj. existuje nějaká primitivní funkce F, pak z Věty VIII.10 plyne, že

$$\int f(x)\,dx = \{F + c \colon c \in \mathbf{R}\}.$$

- Značení

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

znamená, že F je primitivní funkcí k f na I, podle Věty VIII.10 je pak každá primitivní funkce na I tvaru

$$F(x) + c, \quad x \in I.$$

To se snaží zachytit symbol $\stackrel{c}{=}$.

- V literatuře se lze setkat i s jinými způsoby značení, například

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

kde symbolem C se značí množina všech konstantních funkcí na intervalu I.

– Věta VIII.10 je také důvodem, proč se primitivní funkce uvažuje vždy pouze na jednom otevřeném intervalu. Pouze na intervalu totiž Věta VIII.10 platí.

  V početních příkladech se setkáváme často s funkcemi, které jsou definovány nikoli na jednom intervalu, ale třeba na sjednocení dvou nebo i více otevřených intervalů. V takovém případě musíme úlohu řešit na každém intervalu zvlášť (i když třeba výpočet může být na všech intervalech stejný). Tento postup ilustrujeme později na příkladech.

  Teoreticky by bylo možné primitivní funkce počítat i na sjednocení více otevřených intervalů, ale pak by neplatila „jednoznačnost až na konstantu“, protože na každém z intervalů by bylo možné přičíst jinou konstantu.

Celkový komentář ke zbytku oddílu: Větička VIII.11 až Věta VIII.16 obsahují metody výpočtu primitivních funkcí. Důkazy jsou většinou snadné, plynou ze známých vět o derivacích a z toho, že hledání primitivní funkce je inverzní úloha k derivování. Nicméně jejich použití nemusí být tak snadné – hledání primitivních funkcí je více tvůrčí činnost než převážně mechanické derivování.

K Větičce VIII.11:

- Tato větička obsahuje tabulku základních primitivních funkcí. Vychází z tabulky základních derivací, které byly spočítány v Kapitole IV.

  Důkaz se provede ověřením, že derivace funkce na pravé straně je původní funkce.

- V bodech (1), (4), (5) a (9) příslušné primitivní funkce existují na celém $\mathbf{R}$.

  Bod (1) plyne z toho, že $(x^n)' = nx^{n-1}$ na celém $\mathbf{R}$, pokud $n \in \mathbf{N}$.

  Bod (4) plyne z Věty IV.25(E6), bod (5) z Věty IV.28(S14) a Větičky IV.29(i), bod (9) z Větičky IV.30(7).

- Bod (8) plyne z Větičky IV.30(7). V tomto případě existuje primitivní funkce na intervalu $(-1, 1)$, tedy na celém definičním oboru výchozí funkce.

- Body (6) a (7) plynou z Větičky IV.29(ii,iii). Tentokrát je definiční obor výchozí funkce sjednocením nekonečně mnoha navzájem disjunktních otevřených intervalů. Vzorec pro primitivní funkci je pro každý z těchto intervalů stejný, ale platí na každém z nich zvlášť.

- Bod (2) obsahuje dvě tvrzení. První z nich plyne z toho, že pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ platí
$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}, \quad x \in (0,+\infty).$$
To plyne z definice obecné mocniny a pravidel pro derivování, připomeňme:
$$\begin{aligned}(x^{\alpha+1})' &= (\exp((\alpha+1)\log x))' = \exp((\alpha+1)\log x)\cdot(\alpha+1)\cdot\frac{1}{x}\\ &= (\alpha+1)x^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{x} = (\alpha+1)x^{\alpha}\end{aligned}$$
na $(0,+\infty)$.

  Nyní je zřejmé, že z toho dostaneme primitivní funkci k x^{α} na $(0,+\infty)$ pro $\alpha \neq -1$.

  Pokud $\alpha < -1$ je celé záporné číslo, pak $x^{\alpha+1}$ je definováno na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ a na celém $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ platí $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$. Proto v tomto případě platí vzorec pro primitivní funkci i na $(-\infty,0)$.

- Bod (3) se týká primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$. Ta je definována na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, proto primitivní funkce existuje na intervalu $(0,+\infty)$ a na intervalu $(-\infty,0)$.

  Vzorec platný na $(0,+\infty)$ plyne z Věty IV.24(L9).

  Z téhož tvrzení plyne i vzorec na $(-\infty,0)$, ovšem s použitím pravidel pro derivování:

  Pokud $x \in (-\infty,0)$, pak $-x \in (0,+\infty)$, tedy funkce $\log(-x)$ je definována na $(-\infty,0)$. Navíc platí
$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \text{ na } (-\infty,0).$$
Dva vzorce z bodu (3) se často zapisují najednou ve tvaru
$$\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (0,+\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0).$$

K Větičce VIII.12:

- Důkaz je velmi snadný z věty o aritmetice derivací (Věta IV.13(i)). Na intervalu I totiž platí

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

- Příklad použití:

$$\int (x + 3\cos x - 5e^x)\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}x^2 + 3\sin x - 5e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- K zápisu zmíněného v poznámce:

  Levá strana rovnosti je jistá množina funkcí (množina všech primitivních funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I).

  Pravá strana je výraz tvaru $\alpha A + \beta B$, kde A a B jsou příslušné množiny funkcí. To je přirozené chápat jako množinu funkcí

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha u + \beta v \colon u \in A, v \in B\}.$$

  S použitím Věty VIII.10 je z toho zřejmé, že množina na pravé straně je rovna

$$\{\alpha(F + c) + \beta(G + d) \colon c, d \in \mathbf{R}\} = \{\alpha F + \beta G + (\alpha c + \beta d) \colon c, d \in \mathbf{R}\},$$

  což v případě, že aspoň jedno z čísel α, β je nenulové, je rovno množině na levé straně.

  Pokud $\alpha = \beta = 0$, pak rovnost množin neplatí, ale v tom případě je funkce $\alpha f + \beta g$ konstantní nulová funkce, takže úloha hledat primitivní funkci je triviální.

K Větě VIII.13:

- Důkaz je opět snadný, a to s použitím věty o derivaci složené funkce (Věta IV.14):

  Víme, že F je funkce definovaná na intervalu (a, b) a $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$. Speciálně, F má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci.

Dále víme, že φ je definovaná na intervalu (α, β), má v každém bodě tohoto intervalu vlastní derivaci a zobrazuje interval (α, β) do intervalu (a, b) (tj. $\varphi(t) \in (a, b)$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$).

Proto složená funkce $F \circ \varphi$ je definována na intervalu (α, β) a podle Věty IV.14 je její derivace rovna

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

To ovšem dává přesně tvrzení věty.

- Způsob použití této věty:

  Věta VIII.13 se používá v případě, že máme počítat primitivní funkci k nějaké funkci a všimneme si, že zadaná funkce je ve tvaru $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, kde primitivní funkci k funkci f známe.

  V tom případě vezmeme F, primitivní funkci k f, a hledanou primitivní funkcí bude složená funkce $F \circ \varphi$.

  Při aplikaci je mj. potřeba dát pozor na intervaly, kde pracujeme (φ definovaná na nějakém intervalu (α, β), má tam vlastní derivaci, zobrazuje tento interval do nějakého intervalu (a, b), na kterém má funkce f primitivní funkci.

- Několik příkladů použití:

  1. $\int (2x + 1)(x^2 + x + 1)^{15}\, dx$

     Všimneme si, že integrovanou funkci lze vyjádřit ve tvaru $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, kde $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ (a $\varphi'(x) = 2x + 1$) a $f(y) = y^{15}$.

     Přitom funkce φ je definovaná na celém $\mathbf{R}$, v každém bodě $\mathbf{R}$ má vlastní derivaci, a funkce f má primitivní funkci na $\mathbf{R}$:

     $$\int y^{15}\, dy \overset{c}{=} \frac{y^{16}}{16}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

     Proto platí (podle Věty VIII.13)

     $$\int (2x + 1)(x^2 + x + 1)^{15}\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{16}(x^2 + x + 1)^{16}.$$

2. $\int \frac{1}{x}\sin(\log x)\,dx$

   Víme, že $\log' x = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0,+\infty)$, tedy integrovaná funkce je ve tvaru $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, kde $\varphi(x) = \log x$ a $f(y) = \sin y$.

   Protože
$$\int \sin y\,dy \stackrel{c}{=} -\cos y, \quad y \in \mathbf{R},$$
   pomocí Věty VIII.13 dostaneme
$$\int \frac{1}{x}\sin(\log x)\,dx \stackrel{c}{=} -\cos(\log x), \quad x \in (0,+\infty).$$

3. $\int \cos 2x\,dx$

   V tomto případě není hned vidět, že je integrovaná funkce ve tvaru $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Nicméně je to složená funkce, kde vnitřní funkce je $\varphi(x) = 2x$. Protože $\varphi'(x) = 2$, lze integrovanou funkci přepsat ve tvaru
$$\cos 2x = 2\cdot\frac{1}{2}\cos 2x = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$
   kde
$$\varphi(x) = 2x \text{ a } f(y) = \frac{1}{2}\cos y.$$
   Protože
$$\int \frac{1}{2}\cos y\,dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\sin y, \quad y \in \mathbf{R},$$
   z Věty VIII.13 plyne
$$\int \cos 2x\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\sin 2x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Ve všech třech uvedených příkladech lze správnost výsledku snadno ověřit derivováním.

  Zároveň lze v těchto případech výsledek „uhodnout“. Hledáme totiž takovou funkci, jejíž derivací je zadaná funkce. Výsledek snadno uhodneme, pokud umíme větu o derivaci složené funkce.

  Toto není náhoda, protože Věta VIII.13 je vlastně variantou věty o derivaci složené funkce

K Větě VIII.14 a VIII.15:

- Význam a použití: Tyto dvě navzájem podobné věty se používají složitějším způsobem než věta předchozí. Způsob použití je zhruba následující:

  Chceme spočítat primitivní funkci k funkci f na intervalu (a, b) a výsledek na první pohled nevidíme.

  Zvolíme chytře funkci $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňující předpoklady – a to tak, abychom uměli spočítat primitivní funkci k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α, β).

  Pokud je tato primitivní funkce G, pak $G \circ \varphi^{-1}$ bude hledaná primitivní funkce k f.

- Lze se ptát, jak provést tu chytrou volbu. Níže uvedeme nějaké příklady. Dále existuje jistá zásoba chytrých substitucí, které fungují v určitých situacích.

  No, a nebo na to musíme nějak přijít.

- Důkaz Věty VIII.14:

  Abychom tuto větu dokázali, je třeba ukázat, že funkce $G \circ \varphi^{-1}$ je definovaná na intervalu (a, b) a její derivace se rovná funkci f.

  Nejprve se podívejme na funkci φ. Je definována na (α, β) a má v každém bodě vlastní nenulovou derivaci. Proto je derivace φ' buď na celém intervalu (α, β) kladná nebo je na celém intervalu (α, β) záporná.

  (To plyne z Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot pro derivaci. Důkaz je snadný: Dejme tomu, že máme dva body $u, v \in (\alpha, \beta)$ splňující $u < v$, $\varphi'(u) < 0$ a $\varphi'(v) > 0$. Protože φ je spojitá na $\langle u, v \rangle$, nabývá na tomto intervalu minima v nějakém bodě w. Protože $\varphi'(u) < 0$ a $\varphi'(v) > 0$, nemůže být minimum v krajních bodech, je tedy uvnitř intervalu. Proto je to lokální minimum, a tedy $\varphi'(w) = 0$, což je spor. Kdyby $\varphi'(u) > 0$ a $\varphi'(v) < 0$, uvažovali bychom maximum místo minima.)

  Proto je φ na intervalu (α, β) rostoucí nebo klesající, speciálně je prostá a existuje inverzní funkce φ^{-1}. Protože $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, je funkce φ^{-1} definovaná na (a, b) a zobrazuje tento interval na interval (α, β). Proto je funkce $G \circ \varphi^{-1}$ definovaná na intervalu (a, b).

  Dále, podle Věty o derivaci inverzní funkce (Věta IV.22) je

  $$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (a, b).$$

Proto, s použitím Věty o derivaci složené funkce (Věta IV.14) vidíme, že pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(\varphi((\varphi^{-1}(x))))\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x)} = f(x).\end{aligned}$$

Opravdu tedy je $G \circ \varphi^{-1}$ primitivní funkcí k f.

- Důkaz Věty VIII.15:

  Tentokrát víme, že f má primitivní funkci na (a, b). Zvolme tedy nějakou primitivní funkci F.

  Dále víme, že φ je definovaná na intervalu (α, β), má hodnoty v (a, b) a má v každém bodě vlastní derivaci. Tedy funkce $F \circ \varphi$ je definována na (α, β) a podle Věty o derivaci složené funkce má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

  tedy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=\!=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

  Proto jsou funkce $F \circ \varphi$ a G primitivní funkce k téže funkci na (α, β).

  Podle Věty VIII.10 existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$, že

$$F \circ \varphi = G + c \text{ na } (\alpha, \beta). \qquad (*)$$

  Nyní si uvědommě, že φ je prostá funkce a zobrazuje (α, β) na (a, b). Proto existuje inverzní funkce φ^{-1}, která zobrazuje (a, b) na (α, β).

  Z rovnosti $(*)$ tedy plyne

$$F = G \circ \varphi^{-1} + c \text{ na } (a, b),$$

  tedu $G \circ \varphi^{-1} = F - c$ je primitivní funkce k f na (a, b), což jsme chtěli dokázat.

- Porovnání Věty VIII.14 a VIII.15:

  Tyto dvě věty jsou podobné, ale trochu liší se v předpokladech i v tvrzení.

  Ve Větě VIII.14 předpokládáme navíc, že funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou derivaci. Zato nepředpokládáme, že f má primitivní funkci na (a, b), existence primitivní funkce je součást tvrzení.

  Ve Větě VIII.15 předpokládáme navíc, že f má primitivní funkci (tedy předem víme, že primitivní funkce existuje, problém je jenom ji spočítat). Zato funkce φ může mít v některých bodech derivaci nulovou – místo toho předpokládáme, že je prostá. (Ve Větě VIII.14 prostota φ plyne ze silnějšího předpokladu nenulovosti derivace.)

  Matematici mají rádi Větu VIII.14, protože se pomocí ní dá dokázat i existence primitivní funkce. Nicméně v praktickém počítání je užitečnější Věta VIII.15. Důvod je ten, že obvykle počítáme primitivní funkce ke spojitým funkcím, a tedy předem víme, že primitivní funkce existuje. Navíc se v přirozených případech může stát, že v některých bodech má funkce φ derivaci nula.

- Příklady použití:

  1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
     Integrovaná funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, na kterém je také spojitá. Primitivní funkci tedy budeme hledat na intervalu $(-1, 1)$.
     Použijeme druhou substituční metodu s funkcí

     $$\varphi(t) = \sin t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

     Funkce φ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí a zobrazuje ho na interval $(-1, 1)$ (známe totiž průběh funkce sinus).
     Navíc je $\varphi'(t) = \cos t > 0$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
     Počítejme:

     $$\begin{aligned} f(\varphi(t))\varphi'(t) &= \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t = \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \\ &= |\cos t| \cdot \cos t = \cos^2 t \end{aligned}$$

na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (v poslední rovnosti jsme použili, že $\cos t > 0$ na tomto intervalu).

Dále je třeba spočítat

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

(dokonce pro $t \in \mathbf{R}$, ale to nyní není podstatné).

Protože $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$, z Věty VIII.15 (nebo VIII.14) dostáváme

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

To už je výsledek úlohy. Ještě jej lze zjednodušit pomocí výpočtu

$$\begin{aligned} \sin(2\arcsin x) &= 2\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) \\ &= 2x\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = 2x\sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme použili, že $|\cos t| = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ a navíc je kosinus kladný na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Zjednodušený výsledek pak je

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

   Integrovaná funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ je definovaná na $\mathbf{R}$, kde je také spojitá. Primitivní funkci tedy budeme hledat na $\mathbf{R}$.

   Použijeme druhou substituční metodu s funkcí

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

   Funkce φ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí a zobrazuje ho na $\mathbf{R}$ (známe totiž průběh funkce tangens).

   Navíc je $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} > 0$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Počítejme:

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$= \frac{|\cos t|}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos t}$$

na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (v poslední rovnosti jsme použili, že $\cos t > 0$ na tomto intervalu).

Dále je třeba spočítat $\int \frac{1}{\cos t}\, dt$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. To lze udělat například takto:

Jest:

$$\int \frac{1}{\cos t}\, dt = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\, dt.$$

Protože $\sin' t = \cos t$ na $\mathbf{R}$, podle první substituční metody (Věta VIII.13) stačí spočítat $\int \frac{1}{1-s^2}\, ds$ na intervalu $(-1, 1)$.

Počítejme tedy:

$$\int \frac{1}{1-s^2}\, ds = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) ds \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1+s) - \log(1-s)),$$
$$s \in (-1, 1).$$

Aplikací první substituční metody tedy dostaneme

$$\int \frac{1}{\cos t}\, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1+\sin t) - \log(1-\sin t)), \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Protože $\varphi^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbf{R}$, z Věty VIII.15 (nebo VIII.14) dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1+\sin \operatorname{arctg} x) - \log(1-\sin \operatorname{arctg} x)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

To už je výsledek úlohy. Ještě jej lze zjednodušit pomocí výpočtu

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)} \cdot \cos(\operatorname{arctg} x)$$
$$= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

kde v druhé rovnosti jsme použili, že $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ a navíc je kosinus kladný na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Zjednodušený výsledek pak je

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) - \log(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1}+x)^2 \\ &= \log(\sqrt{x^2+1}+x), \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$

   Integrovaná funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ je definovaná na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, kde je také spojitá. Primitivní funkci tedy budeme hledat na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$.

   Nejprve se zabývejme intervalem $(1, +\infty)$. Výpočet na druhém intervalu je velmi podobný a níže specifikujeme rozdíly.

   Použijeme druhou substituční metodu s funkcí

$$\varphi(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

   Funkce φ je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí a zobrazuje ho na $(1, +\infty)$ (známe totiž průběh funkce kosinus).

   Navíc je $\varphi'(t) = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$.

   Počítejme:

$$\begin{aligned}f(\varphi(t))\varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} \\ &= \frac{|\cos t| \cdot \sin t}{|\sin t| \cdot \cos^2 t} = \frac{1}{\cos t}\end{aligned}$$

   na $(0, \frac{\pi}{2})$ (v poslední rovnosti jsme použili, že $\sin t > 0$ a $\cos t > 0$ na tomto intervalu).

   Dále je třeba spočítat $\int \frac{1}{\cos t}\, dt$ na $(0, \frac{\pi}{2})$. To jsme počítali v předchozím příkladu, vyšlo nám

$$\int \frac{1}{\cos t}\, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1 + \sin t) - \log(1 - \sin t)), \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Protože $\varphi^{-1}(x) = \arccos\frac{1}{x}$, $x \in (1, +\infty)$, z Věty VIII.15 (nebo VIII.14) dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1+\sin\arccos\frac{1}{x}) - \log(1-\sin\arccos\frac{1}{x})),$$
$$x \in (1, +\infty)$$

To už je výsledek úlohy na intervalu $(1, +\infty)$. Ještě jej lze zjednodušit pomocí výpočtu

$$\sin(\arccos\frac{1}{x}) = \sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{1}{x}} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

kde v první rovnosti jsme použili, že $|\sin t| = \sqrt{1-\cos^2 t}$ a navíc je sinus kladný na $(0, \frac{\pi}{2})$, v poslední rovnici jsme použili, že pro $x \in (1, +\infty)$ je $\sqrt{x^2} = x$.
Zjednodušený výsledek pak je

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}) - \log(1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}))\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})^2\\ &= \log(x+\sqrt{x^2-1}), \quad x \in (1, +\infty).\end{aligned}$$

Nyní se podívejme na výpočet na $(-\infty, 1)$. Zde zvolíme

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\cos t}, t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Tentokrát je φ klesající a zobrazuje $(0, \frac{\pi}{2})$ na $(-\infty, -1)$. Pak vyjde

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = -\frac{1}{\cos t}$$

a $\varphi^{-1}(x) = \arccos(-\frac{1}{x})$, $x \in (-\infty, -1)$, tedy dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1-\sin\arccos(-\frac{1}{x})) - \log(1+\sin\arccos(-\frac{1}{x}))),$$
$$x \in (-\infty, -1)$$

To už je výsledek úlohy na intervalu $(-\infty,-1)$. Ještě jej lze zjednodušit pomocí výpočtu

$$\sin(\arccos(-\frac{1}{x})) = \sqrt{1-\cos^2\arccos(-\frac{1}{x})} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x},$$

kde v první rovnosti jsme použili, že $|\sin t| = \sqrt{1-\cos^2 t}$ a navíc je sinus kladný na $(0,\frac{\pi}{2})$, v poslední rovnici jsme použili, že pro $x \in (-\infty,-1)$ je $\sqrt{x^2} = -x$. Zjednodušený výsledek pak je

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &\overset{c}{=} \frac{1}{2}(\log(1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}) - \log(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}))\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{-x-\sqrt{x^2-1}}{-x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\log(-x-\sqrt{x^2-1})^2\\ &= \log(-x-\sqrt{x^2-1}), \quad x\in(-\infty,-1).\end{aligned}$$

(Uvědomme si, že pro $x < -1$ je $-x-\sqrt{x^2-1} > 0$.)
Jednotný vzorec pro oba intervaly je

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \overset{c}{=} \log|x+\sqrt{x^2-1}|, \quad x\in(1,\infty) \text{ nebo } x\in(-\infty,-1).$$

- Předchozí příklady ilustrují použití druhé substituční metody. Předem není a priori jasné, jakou substituci použít.

  Uvedené substituce nejsou jediné možné, existují i jiné možnosti, jak spočítat uvedené příklady.

  Existuje také celá řada konkrétních substitucí použitelných v některých typech příkladů. O tom více na cvičeních.

K Větě VIII.16:

- Význam této věty a její použití: Věta se nazývá větou o integraci per partes (tj. po částech). Nedává přímo výsledek – čemu se rovná primitivní funkce k zadané funkci, ale za určitých podmínek převádí výpočet jedné primitivní funkce na výpočet jiné primitivní funkce (který je například jednodušší).

  Rovnost je míněna jako rovnost dvou množin – množina nalevo je množina primitivních funkcí ke gF na I, množina napravo je tvaru

$h + A$, kde h je daná funkce ($h = FG$) a A je nějaká množina funkcí (množina primitivních funkcí k funkci Gf na I), která je definovaná

$$h + A = \{h + u \colon u \in A\}$$

(viz analogický komentář k Větičce VIII.12).

- Důkaz: Důkaz vychází z pravidla derivování součinu.

  Nechť H je nějaká primitivní funkce k funkci Gf na I (ta existuje, protože Gf je spojitá na intervalu I).

  Pak $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF na I, protože

$$(GF - H)' = G'F + GF' - H' = gF + Gf - Gf = gF.$$

  A to je přesně to, co jsme potřebovali.

- Alternativní formulace:

  Nechť I je otevřený interval a funkce u, v jsou definované na I a obě mají na I spojitou derivaci. Pak

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \text{ na } I.$$

  To je zřejmě ekvivalentní původní formulaci (máme $u = G$, $u' = g$, $v = F$, $v' = f$), je však názornější pro praktické počítání.

- Dva příklady použití:

  1.
$$\int xe^x\,dx \underset{\substack{u'(x) = e^x \quad v(x) = x \\ u(x) = e^x \quad v'(x) = 1}}{=} xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx \overset{c}{=} xe^x - e^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

  2.
$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &\underset{\substack{u'(x) = e^x \quad v(x) = x^2 \\ u(x) = e^x \quad v'(x) = 2x}}{=} x^2e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx \\ &\underset{\substack{u'(x) = e^x \quad v(x) = 2x \\ u(x) = e^x \quad v'(x) = 2}}{=} x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) \\ &\overset{c}{=} x^2e^x - 2xe^x + 2e^x, \quad x \in \mathbf{R}\end{aligned}$$