Komentář k oddílu IX.3 – skalární součin a norma

O významu toho oddílu: Jde hlavně o zavedení a vysvětlení často používaného značení. Věty tohoto oddílu jsou buď jednoduché, nebo už je známe jen v trochu jiném značení.

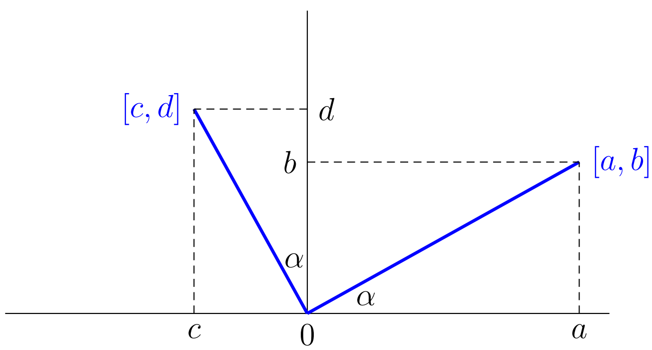
K definici skalárního součinu, normy a kolmosti:

- Skalární součin dvou vektorů v $\mathbf{R}^n$ je definován vzorcem

  $$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

  Dva vektory jsou kolmé, pokud jejich skalární součin je roven nule.

  Toto zde chápeme jako definici kolmosti, je to ovšem v souladu s geometrickým významem kolmosti v rovinné geometrii. Svědčí o tom následující obrázek a jeho interpretace:

  Jsou-li vektory $[a, b]$ a $[c, d]$ kolmé, tj. úsečky spojující počátek s příslušnými body jsou kolmé, pak vyznačené úhly α mají stejnou velikost, a tedy trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[a, 0]$, $[a, b]$ je podobný trojúhelníku s vrcholy $[0, 0]$, $[0, d]$, $[c, d]$. Proto dostaneme, že poměry délek odpovídajících stran se rovnají, tj.

  $$\frac{a}{d} = \frac{b}{-c},$$

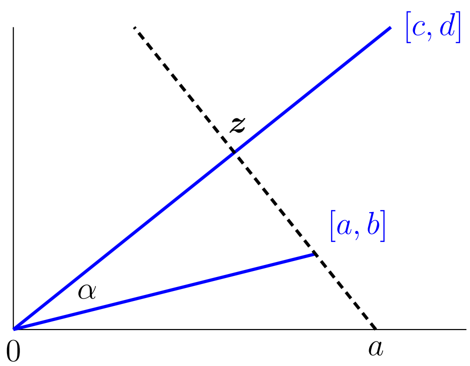
  neboli $ac + bd = 0$. A to je přesně ono, $< [a, b], [c, d] >= 0$.

- Norma vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ je rovna jeho vzdálenosti od počátku, přičemž přímo z definic plyne, že $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{o}) = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$. Jde tedy hlavně o zavedení značení $\|\boldsymbol{x}\|$.

  Normě vektoru se též říká velikost vektoru.

- Skalární součin tak, jak jsme ho definovali, je v souladu se vzorcem $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, známým z rovinné geometrie. Pro případ pravého úhlu jsme to ukázali výše.

  Ilustrujme nyní případ ostrého úhlu mezi vektory:

  Máme vektory $[a, b]$ a $[c, d]$ svírající úhel α. Bodem $[a, b]$ vedeme kolmici k vektoru $[c, d]$, tj. k přímce spojující počátek s bodem $[c, d]$. Tato přímka je tvořena body

  $$[a, b] + t \cdot [-d, c], \quad t \in \mathbf{R}.$$

  To proto, že vektory $[-d, c]$ a $[c, d]$ jsou kolmé.

  Průsečík z se najde řešením soustavy rovnic

  $$[a, b] + t \cdot [-d, c] = s \cdot [c, d]$$

  s neznámými $s, t \in \mathbf{R}$.

  Po vyřešení vyjde $s = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, tedy

  $$\begin{aligned} < [a, b], [c, d] > &= ac + bd = s(c^2 + d^2) = s\|[c, d]\|^2 \\ &= \|[c, d]\| \cdot \underbrace{s\|[c, d]\|}_{=\|\boldsymbol{z}\|=\|[a,b]\|\cdot\cos\alpha} = \|[c, d]\| \cdot \|[a, b]\| \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

K Větičce IX.8: Toto tvrzení obsahuje základní vlastnosti skalárního součinu. Dokáže se snadno pomocí běžných úprav výrazů.

K Větičce IX.9:

- Protože $\|\boldsymbol{x}\| = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{o})$, plyne tato větička z Věty V.1 (o vlastnostech euklidovské metriky).

  Podrobněji:

  Bod (i) je zřejmý a bod (ii) plyne z Věty V.1(i).

  Bod (iii) plyne z Věty V.1(iv).

  Bod (iv) plyne z Věty V.1(iii,v):

  $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{o}) = \rho(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{o})+\rho(\boldsymbol{o}, -\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{o})+\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{o}) = \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

  Bod (v) je tvrzení Věty I.1

- *Skalární součin jsme definovali pouze na prostoru $\mathbf{R}^n$, protože pro naše účely to stačí. Je ovšem možné skalární součin definovat i na obecném vektorovém prostoru V nad $\mathbf{R}$ – a to jako zobrazení, které dvěma vektorům $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ přiřadí číslo $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > \in \mathbf{R}$, přičemž toto zobrazení má vlastnosti (i)–(iii) z Větičky IX.8 a kromě toho platí $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > \geq 0$ pro každé $\boldsymbol{x}$, a pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ platí dokonce $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > > 0$. I pak definujeme normu předpisem $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$ pro $\boldsymbol{x} \in V$. I v této obecné situaci platí Větička IX.9 a její důkaz je celkem snadný:*

(i) a (ii): *Tyto dva body jsou zřejmé.*

(iii): *S použitím definice a vlastností skalárního součinu máme:*

$$\begin{aligned} \|\alpha\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{< \alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x} >} == \sqrt{\alpha < \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x} >} = \sqrt{\alpha < \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} \\ &= \sqrt{\alpha^2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|. \end{aligned}$$

(v): *Použijeme postup důkazu Věty I.1:*
Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Pokud $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, pak $< \boldsymbol{o}, \boldsymbol{y} >= 0$ (zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$ je lineární) a $\|\boldsymbol{o}\| = 0$, takže triviálně platí rovnost.
Nechť $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$. Pro každé $t \in \mathbf{R}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq < t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > = < t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x} > + < t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \\ &= t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Tedy $t \mapsto t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > +\|y\|^2$ *je kvadratická funkce (je* $\|x\|^2 > 0$*), která je na celém* $\mathbf{R}$ *nezáporná. Proto je diskriminant nekladný, tj.*

$$(2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >)^2 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$| < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > | \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|y\|.$$

(iv): Tuto nerovnost dokážeme z (v) podobně jako ve Větě V.1:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &=< \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > +2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > +\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.\end{aligned}$$

Nyní stačí tuto nerovnost odmocnit.

K Větě IX.10:

- Bod (a) je nyní vpodstatě triviální, protože z vlastností skalárního součinu plyne

  $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &=< \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > +2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > +\|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

  Nyní je zřejmé, že

  $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0.$$

  A to je přesně ono.

- Bod (b) je důsledkem bodu (a). Stačí si uvědomit, že $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. Tedy z bodu (a) plyne, že

  $$\| \underbrace{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}_{=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})} \|^2 = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^2 + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad < \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} >= 0.$$

  A to je ono.

- *Z rovnosti*
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + \|\boldsymbol{y}\|^2$$
odvozené výše a z toho, že $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$, *kde* α *je úhel mezi* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$, *plyne kosinová věta*
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha,$$
kde α *je úhel mezi* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$.