Matematika III – vzorové příklady pro teoretický test

Řešení úloh

1. Primitivní funkce existuje na takových otevřených podintervalech intervalu I, na nichž funkce f nenabývá hodnoty 1, tj. na otevřených intervalech obsažených v množině $\{x \in I \colon f(x) \neq 1\}$.

   Na každém z těchto intervalů je primitivní funkcí funkce $-\log|1-f|$. (Plyne to z první substituční metody nebo z věty o derivaci složené funkce.)

   Jiný zápis téhož: Primitivní funkcí je funkce $-\log(1-f)$ na otevřených intervalech obsažených v množině $\{x \in I \colon f(x) < 1\}$ a dále funkce $-\log(f-1)$ na otevřených intervalech obsažených v množině $\{x \in I \colon f(x) > 1\}$.

2. Primitivní funkce má tvar $\frac{1}{2}F(x^2)$, a to na intervalu $(1, \sqrt{2})$ a na intervalu $(-\sqrt{2}, -1)$.

   (Lze použít první či druhou substituční metodu, případně větu o derivaci složené funkce. Intervaly získáme jako otevřené intervaly obsažené v množině $\{x \in \mathbf{R} \colon x^2 \in (1,2)\}$.)

3. Platí
$$\int_{-\frac{9}{2}}^{-2} f\left(\frac{2-4x}{5}\right)\,dx = \frac{35}{4}.$$

   Postup: funkce $\varphi(x) = \frac{2-4x}{5}$ je klesající a zobrazuje $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}$. Dále zobrazuje interval $(-\frac{9}{2}, -2)$ na interval $(2,4)$. Kromě toho $\varphi'(x) = -\frac{4}{5}$, tedy
$$\int_2^4 f = \int_{-\frac{9}{2}}^{-2} \left|-\frac{4}{5}\right| \cdot f\left(\frac{2-4x}{5}\right)\,dx$$
   podle věty o substituci pro zobecněný Riemannův integrál.

4. Integrál je roven
$$\tfrac{3}{4} \cdot 8 + 1 \cdot 2 + (-\tfrac{1}{2}) \cdot 4 + (-\tfrac{1}{4}) \cdot (24 - 8 - 2 - 4) = \tfrac{7}{2}.$$

5. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definované vzorcem $\varphi(x,y) = [x+y, y^2]$ je třídy C^1 a Jacobiho matice je $J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$ je regulární pro $y \neq 0$, tedy všude mimo osu x. φ je prosté na polorovinách $H = \{[x,y]\colon y > 0\}$ a $D = \{[x,y]\colon y < 0\}$. φ dále každou z těchto polorovin zobrazuje na H.

Podle věty o substituci platí pro každou měřitelnou množinu $B \subset H$

$$\int_B f = \int_{\varphi^{-1}(B)\cap H} f(x+y, y^2)\cdot|2y|\,dx\,dy = \int_{\varphi^{-1}(B)\cap D} f(x+y, y^2)\cdot|2y|\,dx\,dy.$$

Pro $B = (1,2) \times (2,4)$ je

$$\varphi^{-1}(B) \cap H = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2\colon y \in (\sqrt{2}, 2), x \in (1-y, 2-y)\}$$
$$\varphi^{-1}(B) \cap D = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2\colon y \in (-2, -\sqrt{2}), x \in (1-y, 2-y)\}$$

Platí tedy

$$\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon y\in(\sqrt{2},2), x\in(1-y,2-y)\}} y f(x+y, y^2)\,dx\,dy = \frac{5}{2}$$

a

$$\int_{\{[x,y]\in\mathbf{R}^2\colon y\in(-2,-\sqrt{2}), x\in(1-y,2-y)\}} y f(x+y, y^2)\,dx\,dy = -\frac{5}{2}.$$

6. Podle Fubiniovy věty platí

$$\begin{aligned}\int_{\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3\colon y^2+z^2\le 2\}} & f(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{\{[y,z]\in\mathbf{R}^2\colon y^2+z^2\le 2\}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x+2y+3z)\,dx\right) dy\,dz \\ &= \int_{\{[y,z]\in\mathbf{R}^2\colon y^2+z^2\le 2\}} 5 dy\,dz \\ &= 5\lambda_2(\{[y,z] \in \mathbf{R}^2\colon y^2+z^2 \le 2\}) = 5\pi(\sqrt{2})^2 = 10\pi.\end{aligned}$$

(Fubiniovu větu lze použít, protože příslušná funkce je integrovatelná, což lze ověřit výpočtem integrálu z absolutní hodnoty – ten vyjde $2\pi \int_{\mathbf{R}} |f|$.)

7. Protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, stačí přidat dva vektory, aby výsledná čtveřice byla lineárně nezávislá (Větička IX.4).

   Například lze přidat vektory $[0,0,1,1]$ a $[0,0,0,1]$, tedy báze je tvořena vektory
   $$[1,1,1,1],[1,2,3,4],[0,0,1,1],[0,0,0,1].$$
   Že jde o lineárně nezávislé vektory, plyne z převodu matice s těmito řádky na schodovitou matici, který je velmi snadný.

8. Například $1, x+2x^2, 3x^3$. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, každá z nich patří do uvedeného podprostoru a všechny čtyři funkce ze zadání lze vyjádřit jako lineární kombinace těchto tří.

   Jiná možnost: $1-x-2x^2, 1+x+2x^2, 1-x-2x^2+3x^3$, tj. první tři z uvedených funkcí. Je snadno vidět, že jsou lineárně nezávislé a poslední funkce je jejich lineární kombinací.

9. Zobrazení a,c,d jsou lineární; zobrazení b,e nikoli.

   Pozitivní část plyne snadno z definice, zobrazení b,e nezobrazují nulu na nulu.

10. $\ker L = \{\{c\cdot 2^n\}_{n=1}^{\infty} \colon c \in \mathbf{R}\}$.

11. Například $L(f)(x) = f(x) - f(0) - (f(1) - f(0))x$.

12. Pro $f \in V$ platí $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_7 x^7$, tedy
    $$L(f)(x) = f(x) - \tfrac{x}{3} f'(x) = a_0 + a_1(1-\tfrac{1}{3})x + a_2(1-\tfrac{2}{3})x^2 + a_3(1-\tfrac{3}{3})x^3 + \cdots + a_7(1-\tfrac{7}{3})x^7.$$
    Z toho je vidět, že $\ker L = \{cx^3 \colon c \in \mathbf{R}\}$.

    Speciálně, $\dim\ker L = 1$, tedy
    $$\dim \operatorname{Im} L = \dim V - \dim\ker L = 8 - 1 = 7.$$

13. Matice může být pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní nebo indefinitní. Nemůže být negativně semidefinitní (a tedy ani negativně definitní).

14. Pro $x \in (-4, 4)$. (Například lze použít Sylvestrovo pravidlo.)

15. Například $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. (Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu.)

16. Například $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Použijeme definici – chceme, aby $\mathbb{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$. Tedy první řádek matice zvolíme tak, aby po vynásobení $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vyšlo 4, atd.

17. Podle věty o zbytku v Peanově tvaru na okolí nuly platí

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \omega_1(x)x^2, \quad g(x) = 1 - 3x^2 + \omega_2(x)x^2,$$

kde ω_1 a ω_2 mají v nule limitu 0.

Protože $g(0) = 1 \neq 0$, má funkce $\frac{f}{g}$ v bodě 0 vlastní druhou derivaci, a tedy její Taylorův polynom řádu 2 v bodě 0 je definová. Pokud $T_2^{f/g,0}(x) = a + bx + cx^2$, pak podle věty o zbytku v Peanově tvaru na okolí nuly platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a + bx + cx^2 + \omega_3(x)x^2,$$

kde ω_3 má v nule limitu 0.

Pokud tuto rovnost vynásobíme $g(x)$ a dosadíme za $f(x)$ a $g(x)$ výše uvedená vyjádření, dostaneme

$$1 + 2x + 3x^2 + \omega_1(x)x^2 = (a + bx + cx^2 + \omega_3(x)x^2)(1 - 3x^2 + \omega_2(x)x^2).$$

Pravpi stranu roznásobíme a dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + \omega_1(x)x^2 &= a + bx + cx^2 - 3ax^2 - 3bx^3 - 3cx^4 \\ &\quad + (1 - 3x^2)\omega_3(x)x^2 + \omega_2(x)x^2(a + bx + cx^2 + \omega_3(x)x^2) \\ &= a + bx + (c - 3a)x^2 + \omega_4(x)x^2, \end{aligned}$$

kde ω_4 má v nule limitu 0.

Proto $a = 1$, $b = 2$ a $c - 3a = 3$, tedy $c = 6$. Hledaný Taylorův polynom je $1 + 2x + 6x^2$.

Kdybychom hledali $T_2^{fg,0}$, byl by postup jednodušší:

Vynásobíme-li vyjádření $f(x)$ a $g(x)$, dostaneme

$$f(x)g(x) = 1 + 2x - 6x^3 - 9x^4 + (1 - 3x^2)\omega_1(x)x^2\omega_2(x)f(x) = 1 + 2x + \omega_5(x)x^2,$$

kde $\omega_5(x)$ má v nule limitu 0.

Proto $T_2^{fg,0}(x) = 1 + 2x$.

18. Víme, že na okolí nuly platí

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \omega_1(x)x^8,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \omega_2(x)x^7,$$

kde ω_1 a ω_2 mají v nule limitu 0. Tedy

$$\sin x - x\cos x = (-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2})x^3 + (\tfrac{1}{120} - \tfrac{1}{24})x^5 + (-\tfrac{1}{5040} + \tfrac{1}{720})x^7 + \omega_3(x)x^8,$$

kde ω_3 má v nule limitu 0.

Odtud je vidět, že

$$a = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{-4}{120} = -\frac{1}{30}$$

a limita pak je

$$-\frac{1}{5040} + \frac{1}{720} = \frac{6}{5040} = \frac{1}{840}.$$

19. Bod $[1, 1]$ je stacionární. Hessova matice má na diagonále kladná čísla, může být tedy pozitivně semidefinitní, pozitivně definitní či indefinitní. Určitě není negativně semidefinitní. Tedy v bodě $[1, 1]$ může být lokální minimum (ostré či neostré) nebo sedlový bod. Lokální maximum tam být nemůže.

20. Například $f(x, y) = (x-1)^2(x-2)(y-1)$.

    Tato funkce je v bodech $[1, 2]$ i $[2, 1]$ rovna 0 a oba body jsou stacionární.

    Přitom libovolně blízko bodu $[2, 1]$ existují body, kde f má kladnou hodnotu (body $[2+\delta, 1+\delta]$ pro $\delta \in (0, 1)$) i body, kde f má zápornou hodnotu (body $[2-\delta, 1+\delta]$ pro $\delta \in (0, 1)$). Proto je bod $[2, 1]$ sedlovým bodem.

    Dále, na okolí bodu $[1, 2]$ platí $f \leq 0$, tedy v tomto bodě je lokální maximum. Protože $f = 0$ na celé přímce $x = 1$, je toto lokální maximum neostré.

Poznámka: Jsou uvedena i zdůvodnění, aby bylo vidět, jak odpověď najít. V testu není třeba podrobná zdůvodnění a výpočty psát, stačí výsledek či odpověď. Jen u otevřených otázek na to, jaké možnosti mohou nastat, je vhodné uvést stručné zdůvodnění (zde by se to týkalo hlavně úlohy 19) – usnadní to hodnocení. Pokud bude úloha formulovaná jako uzavřená (výsledkem je číslo či je třeba zaškrtnout správné možnosti), zdůvodnění se pochopitelně neuvádí.