Komentář k oddílu X.1 – Taylorův polynom funkcí jedné proměnné

K definici, motivaci, Větě X.1 atp.:

- Jednou z motivací pro studium derivace je potřeba aproximovat složité funkce pomocí jednodušších funkcí.

  Připomeňme poznámku z oddílu IV.1 (o tečnosti tečny):

  Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbf{R}$. Pak platí

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (k + q(x-a))}{x-a} = 0 \iff k = f(a) \text{ a } q = f'(a).$$

  Implikace $\Leftarrow$ říká, že v případě, že f má v bodě a vlastní derivaci, pak funkce $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ (jejímž grafem je tečna ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$) v blízkosti a dobře aproximuje funkci f. To, jak dobře, je vyjářeno limitou na levé straně – v čitateli je chyba, které se dopustíme, pokud $f(x)$ nahradíme $g(x)$. Ta limita pak intuitivně říká, že „pro x blízko a je ta chyba výrazně menší než vzdálenost x od a“.

  Implikace $\Rightarrow$ pak říká, že chceme-li nahradit f funkcí, jejímž grafem je přímka, aby takto dobře funkci f aproximovala, pak jediná možnost je vzít tečnu.

- Na tečnu se lze dívat také takto: Chceme f co nejlépe aproximovat polynomem stupně nejvýše 1. Pak chyba může být velmi malá ve srovnání s $x - a$, a to právě v případě, že zvolíme tečnu.

  V tomto oddílu se zabýváme přesnější aproximací – takovou, aby chyba byla velmi malá ve srovnání s $(x-a)^k$. K tomu pak potřebujeme použít polynom stupně nejvýše k, a to je právě Taylorův polynom.

- Taylorův polynom k-tého řádu funkce f v bodě a je definován vzorcem

  $$T_k^{f,a}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad x \in \mathbf{R}.$$

  Taylorův polynom samozřejmě závisí na f, k, a, ale uvažujeme ho jako funkci x – pak je to polynom stupně nejvýše k (může být menšího stupně, pokud jsou příslušné koeficienty nulové).

  Aby byl Taylorův polynom definován, je třeba, aby existovala $f^{(k)}(a)$ – vlastní k-tá derivace funkce f v bodě a, což je uvedeno, jako základní předpoklad.

Pokud existuje vlastní k-tá derivace funkce f v bodě a, $f^{(k)}(a)$, pak $(k-1)$-tá derivace $f^{(k-1)}$ je definovaná na okolí bodu a a v bodě a je spojitá. Stejně tak derivace nižších řádů i samotná funkce f.

- $T_k^{f,a}$ je polynom stupně nejvýše k. Spočtěme jeho derivaci:

$$\begin{aligned}
(T_k^{f,a})'(x) &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)' \\
&= \underbrace{(f(a))'}_{=0} + \underbrace{(f'(a)(x-a))'}_{=f'(a)} + \underbrace{\left(\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right)'}_{=\frac{f''(a)}{2}\cdot 2(x-a)} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)'}_{=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot k(x-a)^{k-1}} \\
&= f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Protože $f''(a) = (f')'(a), \ldots, f^{(k)}(a) = (f')^{(k-1)}(a)$, vidíme, že vyšel Taylorův polynom řádu $k-1$ funkce f' v bodě a. Neboli jsme spočítali, že

$$(T_k^{f,a})' = T_{k-1}^{f',a}. \qquad (*)$$

Tuto rovnost jsme dokázali pro $k \geq 2$ (aby $T_{k-1}^{f',a}$ byl definován – Taylorův polynom je definován pro řády $k \in \mathbf{N}$). Ale dává smysl i pro $k = 1$ – vyjde $(T_1^{f,a})' = f'(a)$, což by šlo interpretovat jako „Taylorův polynom řádu 0 funkce f' v bodě a“.

- Výpočet derivace Taylorova polynomu v předchozím bodu se dá využít mj. k důkazu následujícího pozorování:

$$\forall j \in \{0, \ldots, k\} : f^{(j)}(a) = (T_k^{f,a})^{(j)}(a), \qquad (**)$$

samozřejmě v případě, že je Taylorův polynom definován, tj. pokud existuje vlastní $f^{(k)}(a)$.

Přitom v $(**)$ používáme konvenci $f^{(0)} = f$ („nultá derivace“ funkce je funkce sama).

Pro $j = 0$ to je zřejmé. Přímo z definice Taylorova polynomu totiž dosazením $x = a$ plyne

$$T_k^{f,a}(a) = f(a).$$

Pro $j = 1$ platí

$$(T_k^{f,a})'(a) \overset{(*)}{=} T_{k-1}^{f',a}(a) = f'(a).$$

Pro vyšší hodnoty j aplikujemem $(*)$ opakovaně:

$$(T_k^{f,a})^j(a) \overset{(*)}{=} (T_{k-1}^{f',a})^{j-1}(a) \overset{(*)}{=} (T_{k-2}^{f'',a})^{j-2}(a) \overset{(*)}{=} \cdots \overset{(*)}{=} T_{k-j}^{f^{(j)},a}(a) = f^{(j)}(a).$$

Tedy Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě a je takový polynom stupně nejvýše k, který má v bodě a stejnou hodnotu a všechny derivace až do řádu k jako funkce f. Tak je vlastně definován.

- Důkaz implikace $\Rightarrow$ z Věty X.1:

  Tato implikace říká, že (pokud f má v bodě a vlastní k-tou derivaci), pak
  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^k} = 0. \qquad (***)$$
  Toto lze dokázat indukcí podle k.

  Pro $k = 1$ bylo tvrzení dokázáno již v oddílu IV.3 v rámci poznámky „o tečnosti tečny“, jak jsme připomněli výše.

  Předpokládejme tedy, že $k \geq 1$ a pro k tvrzení platí. Ukažme, že platí i pro $k+1$. Nechť tedy existuje vlastní $f^{(k+1)}(a)$. Počítejme:
  $$\lim_{x\to a} \frac{\boxed{f(x) - T_{k+1}^{f,a}(x)}^{\to f(a)-T_{k+1}^{f,a}(a)=0}}{\boxed{(x-a)^{k+1}}_{\to 0}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - T_{k+1}^{f,a}(x))'}{((x-a)^{k+1})'}$$
  $$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_{k+1}^{f,a})'(x)}{(k+1)(x-a)^k} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_k^{f',a}(x)}{(k+1)(x-a)^k} \overset{\text{ind. předp.}}{=} 0.$$

- Důkaz implikace $\Leftarrow$ z Věty X.1:

  Tato implikace říká, že pokud P je polynom stupně nejvýše k a
  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0, \qquad (\circ)$$
  pak nutně $P = T_k^{f,a}$. Neboli, jediný polynom stupně nejvýše k, který splňuje $(\circ)$, je Taylorův polynom řádu k.

  Dokažme to: Nechť P je polynom stupně nejvýše k, který splňuje $(\circ)$. Podle již dokázané implikace víme, že platí $(***)$. Pokud rovnosti $(\circ)$

a $(***)$ odečteme, podle Věty o aritmetice limit dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{\overbrace{\boxed{T_k^{f,a}(x) - P(x)}}^{Q(x)}}{(x-a)^k} = 0.$$

Označme čitatel $Q(x)$. Pak Q je polynom stupně nejvýše k a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

Z Věty o limitě složené funkce plyne

$$\lim_{y\to 0} \frac{Q(y+a)}{y^k} = 0 \qquad (\circ\circ)$$

(vnitřní funkce $y \mapsto y + a$ je prostá, je tedy splněna podmínka (P)).

Q je polynom stupně nejvýše k, tj. existují $a_0, \dots, a_k \in \mathbf{R}$, že

$$Q(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0.$$

Pak

$$Q(y+a) = a_k(y+a)^k + \dots + a_1(y+a) + a_0 = b_k y^k + \dots + b_1 y + b_0$$

pro vhodná čísla $b_0, \dots, b_k \in \mathbf{R}$, tedy i funkce $Q(y+a)$ je polynom stupně nejvýše k.

Chceme dokázat, že Q je nulový polynom. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak ani $Q(y+a)$ není nulový polynom, tedy aspoň jedno z čísel $b_0, \dots b_k$ je různé od nuly.

Nechť l je nejmenší index, pro které je $b_l \neq 0$ (tj. $b_l \neq 0$ a $b_j = 0$ pro $0 \leq j < l$). Pak

$$\lim_{y\to 0} \frac{Q(y+a)}{y^l} = \lim_{y\to 0} \frac{b_k y^k + \dots + b_l y^l}{y^l} = \lim_{y\to 0} b_k y^{k-l} + \dots + b_l = b_l \neq 0.$$

Zároveň ovšem

$$\lim_{y\to 0} \frac{Q(y+a)}{y^l} = \lim_{y\to 0} \underbrace{y^{k-l}}_{\to 0 \text{ nebo } 1} \cdot \underbrace{\frac{Q(y+a)}{y^k}}_{\to 0 \text{ dle } (\circ\circ)} = 0,$$

což je spor.

Tedy Q je opravdu nulový polynom, neboli $P = T_k^{f,a}$, čímž je důkaz hotov.

- Věta X.1 obsahuje dvě tvrzení – jednak platnost $(* * *)$, tj. že $T_k^{f,a}$ splňuje rovnosti $(\circ)$; dále pak, že $T_k^{f,a}$ je jediný polynom stupně nejvýše k, který splňuje $(\circ)$.

  Dá se tedy používat dvěma směry – buď známe Taylorův polynom, pak víme, že platí $(* * *)$. Nebo víme, že existuje vlastní derivace $f^{(k)}(a)$ a nějakým způsobem najdeme polynom P stupně nejvýše k, který splňuje $(\circ)$. Potom P musí být Taylorův polynom.

- Rovnost $(\circ)$ (resp. $(***)$) se dá zapsat ještě jiným způsobem. Vysvětleme si to:

  Z triviálních důvodů na nějakém okolí bodu a platí

$$f(x) = P(x) + (\underbrace{f(x) - P(x)}_{\text{zbytek (či chyba)}})$$

  Když chceme $f(x)$ nahradit $P(x)$, dopouštíme se chyby $f(x) - P(x)$. Pokud platí $(\circ)$, pak tato chyba či zbytek se dá vyjádřit ve tvaru

$$f(x) - P(x) = \omega(x) \cdot (x-a)^k, \qquad (\square)$$

  kde $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$.

  Stačí totiž položit

$$\omega(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} \text{ pro } x \neq a.$$

  Pak funkce ω má v bodě a limitu 0 (to je přesně rovnost $(\circ)$) a zřejmě platí $(\square)$ na nějakém prstencovém okolí bodu a.

  Na hodnotě $\omega(a)$ nezáleží, takže můžeme předpokládat, že $\omega(a) = 0$. Pak $(\square)$ platí na okolí bodu a (včetně bodu a) a některé výpočty to může zjednodušit.

Tedy ($\circ$) lze přepsat ve tvaru

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\omega(x) \cdot (x-a)^k}_{\text{zbytek}} \quad \text{pro } x \text{ z nějakého okolí } a,$$

kde $\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$.

K Větičce X.2:

- Tato větička je aplikací Věty X.1 na několik funkcí, jejichž všechny derivace umíme spočítat.

  Dokáže se tak, že ukážeme, že příslušný polynom je Taylorův polynom a pak se použije Věta X.1 a výše vysvětelný zápis.

  Proberme jednotlivé případy:

(1): K důkazu tohoto tvrzení je třeba použít Větu X.1 a spočítat, že

$$T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}. \tag{E}$$

To je ovšem snadné. Stačí si uvědomit, že

$$\exp' x = \exp x, \qquad x \in \mathbf{R},$$

a tedy matematickou indukcí odvodíme, že

$$\exp^{(n)} x = \exp x, \qquad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}.$$

Tedy

$$\exp^{(n)} 0 = \exp 0 = 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tedy dosazením do definice Taylorova polynomu dostaneme rovnost (E) a důkaz je hotov.

(2): K důkazu tohoto tvrzení je třeba použít Větu X.1 a spočítat, že

$$T_{2k}^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{S}$$

K tomu si uvědomme, že

$$
\begin{aligned}
\sin' x &= \cos x, && x \in \mathbf{R},\\
\sin'' x &= \cos' x = -\sin x, && x \in \mathbf{R},\\
\sin''' x &= -\sin' x = -\cos x, && x \in \mathbf{R},\\
\sin^{(4)} x &= -\cos' x = \sin x, && x \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

Tedy čtvrtá derivace funkce sinus je opět funkce sinus. Proto matematickou indukcí odvodíme, že pro každé $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sin^{(4j)} x = \sin x, \quad \sin^{(4j+1)} x = \cos x, \quad \sin^{(4j+2)} x = -\sin x, \quad \sin^{(4j+3)} x = -\cos x$$

pro $x \in \mathbf{R}$. Protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$, dostáváme

$$\sin^{(4j)} 0 = 0, \quad \sin^{(4j+1)} 0 = 1, \quad \sin^{(4j+2)} 0 = 0, \quad \sin^{(4j+3)} 0 = -1$$

pro $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Dosazením do definice Taylorova polynomu nyní dostaneme (S).

Ještě zdůrazněme, že $\sin^{(n)} 0 = 0$ pro každé n sudé. Z toho plyne, že

$$T^{\sin,0}_{2k-1} = T^{\sin,0}_{2k}$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Tedy Taylorův polynom řádu $2k$ má v tomto případě stupeň $2k-1$.

(3): K důkazu tohoto tvrzení je třeba použít Větu X.1 a spočítat, že

$$T^{\cos,0}_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \qquad (C)$$

Pro důkaz této rovnosti jsou dvě možnosti. Můžeme postupovat zcela analogicky jako v bodě (2) – spočítat derivace všech řádů funkce kosinus, dosadit nulu a nakonec dosadit do definice Taylorova polynomu.

Jiná možnost je použít výsledek bodu (2), skutečnost, že $\sin' = \cos$ a rovnost $(*)$ výše.

Tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
T^{\cos,0}_{2k+1}(x) = T^{\sin',0}_{2k+1}(x) \overset{(*)}{=} (T^{\sin,0}_{2k+2})'(x) &\overset{(S)}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)'\\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!}\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

Tím jsme dokázali rovnost (C).

Nakonec zdůrazněme, že

$$T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0}$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Tedy Taylorův polynom řádu $2k+1$ má stupeň $2k$.

(4): Označme $f(x) = \log(1+x)$. Pak f je definována na intervalu $(-1, +\infty)$ a má na tomto intervalu derivace všech řádů.

Abychom tvrzení (4) dokázali, stačí použít Větu X.1 a spočítat, že

$$T_k^{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}. \qquad (L)$$

Počítejme tedy. Jest

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & x \in (-1, +\infty),\\
f''(x) &= \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}, & x \in (-1, +\infty),\\
f'''(x) &= \left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(-1)\cdot(-2)}{(1+x)^3}, & x \in (-1, +\infty),\\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{(-1)\cdot(-2)}{(1+x)^3}\right)' = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{(1+x)^4}, & x \in (-1, +\infty),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Matematickou indukcí nyní snadno dokážeme, že

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad x \in (-1, +\infty), n \in \mathbf{N}.$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Protože je $f(0) = 0$, dosazením do definice Taylorova polynomu dostaneme rovnost (L).

(5): Označme $g_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$. Pak g_α je definována na intervalu $(-1,+\infty)$ a má na tomto intervalu derivace všech řádů.

Abychom tvrzení (5) dokázali, stačí použít Větu X.1 a spočítat, že

$$T_k^{g_\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k. \qquad (M_\alpha)$$

Koeficienty $\binom{\alpha}{j}$ jsou zobecněná kombinační čísla, tj.

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \ \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \text{ pro } j \geq 1.$$

Pokud $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a $0 \leq j \leq \alpha$, jde o běžné kombinační číslo.

Spočtěme derivace funkce g_α:

$$\begin{aligned}
g'_\alpha(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, && x \in (-1,+\infty),\\
g''_\alpha(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, && x \in (-1,+\infty),\\
g'''_\alpha(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, && x \in (-1,+\infty),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyní matematickou indukcí snadno odvodíme, že

$$g_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad x \in (-1,+\infty), n \in \mathbf{N}.$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$g_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Protože $g_\alpha(0) = 1$, dosazením do definice Taylorova polynomu dostaneme rovnost (M_α).

- Bod (5) lze považovat za jisté zobecnění binomické věty. Pokud $\alpha \in \mathbf{N}$, pak $\binom{\alpha}{j}$ pro $0 \leq j \leq \alpha$ jsou standardní kombinační čísla a $\binom{\alpha}{j} = 0$ pro $j > \alpha$.

  Binomická věta v tomto případě říká, že

  $$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha.$$

  Bod (5) pak říká, že pro $k \geq \alpha$ je

  $$T_k^{g_\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha = g_\alpha(x).$$

K definici a vlastnostem malého o:

- Věta X.1 a Větička X.2 se dají mj. použít k výpočtům limit funkcí.

  K jednoduššímu zápisu se často používá značení pomocí malého o:

  - $f(x) = o(g(x)), x \to a$ znamená, že $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  - $f(x) = u(x)+o(g(x)), x \to a$ znamená, že $f(x)-u(x) = o(g(x)), x \to a$, tj. že $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-u(x)}{g(x)} = 0$.

  Součástí tohoto značení je vždy symbol $x \to a$ pro nějaké $a \in \mathbf{R}^*$, tedy používá se vždy v kontextu výpočtu limit.

  Zhruba řečeno, symbolem $o(g(x))$ značíme nějakou funkci, která po vydělení $g(x)$ má limitu 0 (pro $x \to a$).

  S použitím tohoto značení lze rovnost $(***)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + o((x-a)^k),\ x \to a.$$

- Věta X.3 shrnuje několik početních pravidel pro práci s malým o.

  Plyne z věty o aritmetice limit a z doplňků k této větě.

  Probereme jednotlivé body:

  (i): Předpoklady říkají, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0.$$

  Z Věty o aritmetice limit pak plyne

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0+0=0,$$

  což dokazuje, že

$$f_1(x)+f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

  Tím je důkaz hotov.

  Další případy se dokazují podobně, napíšeme pouze klíčové výpočty, (ii):

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{f_2(x)}{g_2(x)}}_{\to 0}\overset{AL}{=}0\cdot 0=0.$$

(iii):

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)f_2(x)}{g(x)f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)\cdot\cancel{f_2(x)}}{g(x)\cdot\cancel{f_2(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g(x)}=0.$$

(iv):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{f(x)}{g_1(x)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{g_1(x)}{g_2(x)}}_{\to c\in\mathbf{R}}\overset{AL}{=}0\cdot c=0.$$

(v):

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)f_2(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f_1(x)}{g(x)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{f_2(x)}_{\text{omez.}}=0$$

(vi):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^m}=\lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f(x)}{(x-a)^n}}_{\to 0}\cdot\underbrace{(x-a)^{n-m}}_{\to 0\text{ nebo }1}\overset{AL}{=}0.$$

- Věta X.4 je důsledkem věty o limitě složené funkce:

  Předpoklady jsou:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b,$$
$$\lim_{y\to b}\frac{f(y)}{g(y)}=0,$$
$$\exists\delta>0\,\forall x\in P(a,\delta):\varphi(x)\neq b.$$

  Tedy podle věty o limitě složené funkce s podmínkou (P) dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))}=0.$$

  A to je přesně ono.

- Práce s malým o může zjednodušit výpočty, pokud je používána správně.

  Zdůrazněme, že výpočty s malým o jsou jednosměrné, rovnosti nejsou ekvivalentní úpravy, rovnosti nelze obracet.

  Například platí rovnost

  $$o(x^2) = o(x), \quad x \to 0.$$

  Tj., pokud f je funkce, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, pak pro ni platí i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

  Avšak rovnost

  $$o(x) = o(x^2), \quad x \to 0$$

  neplatí – například funkce $f(x) = x^2$ splňuje $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \neq 0$.

K Větě X.5 a Větičce X.6:

- Význam těchto vět: Věta X.1 nám říká, že Taylorův polynom funkce f v bodě a dobře aproximuje funkci f v blízkosti bodu a.

  Povaha této věty ji však umožňuje použít pouze k výpočtu limit, nikoli k přibližnému výpočtu hodnot funkce – víme, že chyba je malá vzhledem k vzdálenosti (vzhledem ke k-té mocnině vzdálenosti pro Taylorův polynom řádu k), ale nevíme, jak konkrétně je velká v daném bodě.

  Věta X.5 dává přesnější odhad chyby – ovšem za silnějších předpokladů (nestačí, že existuje vlastní k-tá derivace v bodě a, potřebujeme spojitou $(k+1)$-tou derivaci na nějakém intervalu).

  Použití uvidíme v následujícím oddílu.

- Věta X.5 – předpoklady a tvrzení:

  Základní předpoklad je jeden – funkce f je třídy C^{k+1} na otevřeném intervalu I.

  Za tohoto předpokladu věta říká, že zbytek, tj. chybu, která vznikne, pokud funkci f nahradíme Taylorovým polynomem řádu k, lze odhadnout pomocí $(k+1)$-té derivace funkce f ve vhodném bodě.

  Přesněji – zvolím bod $a \in I$ a nahradím f Taylorovým polynomem řádu k v bodě a.

Pak chybu v bodě $x \in I$ lze odhadnout pomocí $(k+1)$-té derivace funkce f ve vhodném bodě mezi a a x.

Pro $x > a$ vyjde $\xi \in (a, x)$, pro $x < a$ vyjde $\xi \in (x, a)$.

Pokud $x = a$, pak chyba je nulová a lze vzít $\xi = x = a$.

- Věta X.5 – důkaz:

  Mějme tedy otevřený interval I, funkci f třídy C^{k+1} na I, bod $a \in I$ a bod $x \in I$.

  Jak jsme již výše poznamenali, jsou tři možnosti: $x = a$, $x > a$, $x < a$. Přitom první možnost je triviální (funguje $\xi = x = a$, což je zároveň jediná možná volba). Dále budeme předpokládat, že $x > a$. Případ $x < a$ je zcela analogický.

  Mějme tedy $x > a$.

  Důkaz provedeme podobně, jako se dokazovala Lagrangeova věta o střední hodnotě (Věta IV.33) z Rolleovy věty (Věta IV.32).

  Definujeme si pomocnou funkci $g : I \to \mathbf{R}$ předpisem

  $$g(y) = f(y) - T_k^{f,a}(y) - (f(x) - T_k^{f,a}(x)) \cdot \frac{(y-a)^{k+1}}{(x-a)^{k+1}}, \quad y \in I.$$

  Ukažme si některé důležité vlastnosti funkce g, které budeme dále potřebovat:

  (i) g je třídy C^{k+1} na I.

  To je vidět, když si funkci přepíšeme takto:

  $$g(y) = \underbrace{f(y)}_{\in C^{k+1}(I)} - \underbrace{T_k^{f,a}(y)}_{\text{polynom}} - \underbrace{\frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}}}_{\text{konstanta}} \cdot \underbrace{(y-a)^{k+1}}_{\text{polynom}}, \quad y \in I,$$

  přičemž víme, že polynomy jsou dokonce třídy C^∞ na $\mathbf{R}$.

  (ii) $g(x) = 0$.

  Dosadíme-li do g za y hodnotu x, dostaneme

  $$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - T_k^{f,a}(x) - (f(x) - T_k^{f,a}(x)) \cdot \frac{\cancel{(x-a)^{k+1}}}{\cancel{(x-a)^{k+1}}} \\ &= f(x) - T_k^{f,a}(x) - (f(x) - T_k^{f,a}(x)) = 0. \end{aligned}$$

(iii) Pro $j = 1, \dots, k$ platí pro $y \in I$

$$g^{(j)}(y) = f^{(j)}(y) - (T_k^{f,a})^{(j)}(y) - \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}} \cdot (k+1)k \cdots (k-j+2)(y-a)^{k+1-j}.$$

To plyne z definice funkce g pomocí běžných pravidel pro derivování.

(iv) Pro $y \in I$ platí

$$g^{(k+1)}(y) = f^{(k+1)}(y) - (k+1)! \cdot \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}}.$$

Ukažme si, že toto plyne z (iii). Pokud totiž (iii) aplikujeme pro $j = k$, dostaneme

$$g^{(k)}(y) = f^{(k)}(y) - (T_k^{f,a})^{(k)}(y) - \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}} \cdot \underbrace{(k+1)k \cdots (k-k+2)}_{=(k+1)k\cdots 2=(k+1)!}(y-a)^{k+1-k}$$

$$= f^{(k)}(y) - (T_k^{f,a})^{(k)}(y) - (k+1)! \cdot \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}}(y-a).$$

Pokud tento vztah ještě jednou zderivujeme, dostaneme

$$g^{(k+1)}(y) = f^{(k+1)}(y) - \underbrace{(T_k^{f,a})^{(k+1)}(y)}_{=0} - (k+1)! \cdot \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}}$$

$$= f^{(k+1)}(y) - (k+1)! \cdot \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}},$$

kde jsme použili skutečnost, že $T_k^{f,a}$ je polynom stupně nejvýše k, a tedy jeho $(k+1)$-tá derivace je konstantní nulová funkce.

Tím jsme dokázali slíbenou rovnost.

(v) $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(k)}(a) = 0$.

Toto ověříme dosazením $y = a$. Nejprve do g:

$$g(a) = f(a) - \underbrace{T_k^{f,a}(a)}_{=f(a)} - (f(x) - T_k^{f,a}(x)) \cdot \frac{\boxed{(a-a)^{k+1}}^{=0}}{(x-a)^{k+1}} = 0.$$

Pro $j = 1, \dots, k$ dosadíme $y = a$ do vzorce z (iii):

$$g^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) - \underbrace{(T_k^{f,a})^{(j)}(a)}_{=f^{(j)}(a) \text{ dle } (**)} - \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}} \cdot (k+1)k \cdots (k-j+2) \underbrace{(a-a)^{k+1-j}}_{=0}$$
$$= f^{(j)}(a) - f^{(j)}(a) - 0 = 0.$$

Nyní jsme připraveni dokončit důkaz pomocí opakovaného použití Rolleovy věty.

Funkce g na intervalu $\langle a, x \rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty (je spojitá na tomto intervalu a má derivaci v každém vnitřním bodě – to plyne z (i) a platí $g(a) = g(x) = 0$ podle (ii) a (v).

Tedy podle Rolleovy věty (Věta IV.32) existuje bod $\xi_1 \in (a, x)$, pro který platí $g'(\xi_1) = 0$.

Nyní si uvědomme, že g' splňuje předpoklady Rolleovy věty, tentokrát na menším intervalu $\langle a, \xi_1 \rangle$. (g' je spojitá na tomto intervalu a má derivaci (což je druhá derivace g) v každém vnitřním bodě podle (i). Dále máme $g'(a) = g'(\xi_1) = 0$ – to plyne z (v) a z volby ξ_1.)

Podle Rolleovy věty tedy existuje $\xi_2 \in (a, \xi_1)$, pro které platí $g''(\xi_2) = 0$.

Pokud $k \geq 2$, pak g'' opět splňuje předpoklady Rolleovy věty, a to znovu na menším intervalu $\langle a, \xi_2$. Existuje tedy $\xi_3 \in (a, \xi_2)$, pro které platí $g'''(\xi_3) = 0$.

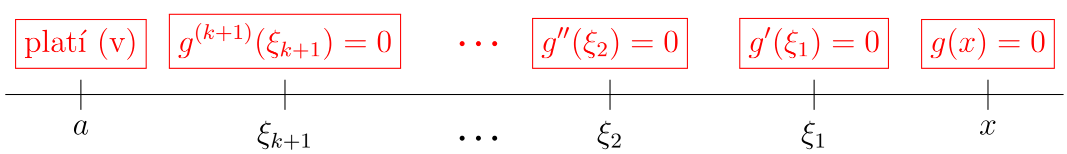
Takto induktivně postupujeme dále – opakovaně používáme body (i) a (v) a Rolleovu větu, až dostaneme body $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$, pro které platí

$$x > \xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_{k+1} > a$$

a

$$g'(\xi_1) = 0, g''(\xi_2) = 0, \dots, g^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = 0.$$

Tento postup je schematicky znázorněn na obrázku:



Jako výsledek tohoto postupu dostaneme bod $\xi_{k+1} \in (a, x)$, pro který $g^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = 0$. Pokud použije vzorec pro $g^{(k+1)}$ z (iv), máme

$$f^{(k+1)}(\xi_{k+1}) - (k+1)! \cdot \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{(x-a)^{k+1}} = 0$$

neboli

$$f(x) - T_k^{f,a}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

A to je ono – stačí vzít $\xi = \xi_{k+1}$.

- Větička X.6: Tato větička je aplikací Věty X.5 na několik konkrétních funkcí. Dokáže se tak, že použijeme znalost Taylorových polynomů těchto funkcí (ty jsou ve Větičce X.2) a znalost derivací těchto funkcí.

  Ve všech třech případech máme $I = \mathbf{R}$ – funkce $\exp, \sin, \cos$ jsou třídy C^∞ na $\mathbf{R}$. Zároveň máme $a = 0$.

  Proberme jednotlivé body:

  (1): $T_k^{\exp,0}$ známe z (E). Dále platí, že $\exp^{(k+1)} x = \exp x$ pro každé $x \in \mathbf{R}$.

  Dosazením do Věty X.5 tedy dostame uvedené tvrzení.

  (2): Díky (S) známe Taylorův polynom funkce sinus, konkrétně $T_{2k}^{\sin,0}$. Abychom mohli použít Větu X.5, stačí si uvědomit, že

  $$\sin^{(2k+1)} x = (-1)^k \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

  Toto jsme spočítali v důkazu Větičky X.2, kde to vyšlo ve tvaru

  $$\sin^{(4j+1)} x = \cos x, \quad \sin^{(4j+3)} x = -\cos x, \qquad x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

  (3): Díky (C) známe Taylorův polynom funkce kosinus, konkrétně $T_{2k+1}^{\cos,0}$. Abychom mohli použít Větu X.5, stačí spočítat

  $$\cos^{(2k+2)} x = (\cos')^{(2k+1)} x = -\sin^{(2k+1)}(x) \overset{(2)}{=} -(-1)^k \cos x = (-1)^{k+1} \cos x$$

  pro $x \in \mathbf{R}$.