**Matematika III – seznam otázek pro ústní pohovor**

1. Spočtěte obsah kruhu o poloměru $r$ a objem koule o poloměru $r$. Výsledek využijte k výpočtu obsahu elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ a objemu elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$. (Použijte substituci $x = au$, $y = bv$ pro elipsu a $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ pro elipsoid.)

2. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte integrály

$$\int_{B(0,1)} (x^2 + y^2)^\alpha \, dx \, dy \text{ a } \int_{\mathbf{R}^2 \setminus B(0,1)} (x^2 + y^2)^\alpha \, dx \, dy$$

   v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$. (Použijte polární souřadnice.)

3. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ spočtěte integrály

$$\int_{B(0,1)} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \, dx \, dy \, dz \text{ a } \int_{\mathbf{R}^3 \setminus B(0,1)} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \, dx \, dy \, dz$$

   v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$. (Použijte sférické souřadnice.)

4. Odvoďte následující dva vzorce:

   (a) Vzorec pro objem obecného kuželu: Nechť $A \subset \mathbf{R}^2$ je měřitelná množina konečné míry. Uvažme kužel s podstavou $A \times \{0\}$ (tj. $\{[x, y, 0] \colon [x, y] \in A\}$) a s vrcholem $[0, 0, v]$. Spočtěte objem tohoto kuželu.

   (b) Vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa: Nechť $a < b$ jsou reálná čísla, nechť $f$ je funkce spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Uvažme těleso vzniklé rotací plochy pod grafem kolem osy $x$, tj. $\{[x, y, z] : x \in (a, b), \rho([y, z], [0, 0]) < f(x)\}$. Použijte znalost vzorce pro obsah kruhu.

5. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($V$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in V$.)

   (a) Vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

   (b) Množina $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ je lineárně nezávislá.

   (c) Dimenze podprostoru generovaného vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ je $n$.

   (d) Vektor $\boldsymbol{x}_1$ nelze zapsat jako lineární kombinaci $\{\boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$

6. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($V$ je vektorový prostor.)

   (a) $\dim V = n$.

   (b) Ve $V$ existuje $n$ lineárně nezávislých vektorů.

   (c) Ve $V$ neexistuje $n+1$ lineárně nezávislých vektorů.

   (d) Platí (2) a (3) zároveň.

7. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($U$ a $V$ jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ zobrazení.)

   (a) $L$ je lineární zobrazení $U$ do $V$.

   (b) $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.

   (c) Obor hodnot zobrazení $L$ je vektorový podprostor $V$.

   (d) Pro každé $\boldsymbol{u}_0 \in U$ je množina všech řešení rovnice $L(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{u}_0)$ rovna $\{\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{v} : L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\}$.

8. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($U$ a $V$ jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ zobrazení.)

   (a) $L$ je lineární zobrazení $U$ do $V$.

   (b) $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.

   (c) $\{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}$ je vektorový podprostor $U$.

   (d) Pro každý podprostor $W$ prostoru $V$ je $L^{-1}(W)$ podprostorem $U$.

9. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $n \times n$.)

   (a) Matice $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní.
   (b) 0 není vlastním číslem matice $\mathbb{A}$.
   (c) Matice $\mathbb{A}$ je regulární.
   (d) Všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou nezáporná.

10. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $n \times n$.)

    (a) Matice $\mathbb{A}$ je indefinitní.
    (b) Aspoň jedno vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ je záporné.
    (c) Matice $\mathbb{A}$ není pozitivně definitní ani negativně definitní.
    (d) Matice $\mathbb{A}$ není pozitivně semidefinitní.

11. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je matice typu $n \times n$.)

    (a) Matice $\mathbb{A}$ je symetrická.
    (b) Pro každé $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ platí $\boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u}$.
    (c) Všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou reálná.
    (d) Pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí $(\boldsymbol{e}^i)^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}^j = (\boldsymbol{e}^j)^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}^i$.

12. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($U$ a $V$ jsou vektorové prostory, $\dim U = n$, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení.)

    (a) $L$ je prosté.
    (b) $\dim \operatorname{Im}(L) = n$.
    (c) Pro každé nenulové $\boldsymbol{u} \in U$ je $L(2\boldsymbol{u}) \neq L(\boldsymbol{u})$.
    (d) $\dim \operatorname{Im}(L) \geq n$.

13. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení, $\mathbb{A}$ jeho reprezentující matice, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.)

    (a) $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}(L)$.

    (b) $\boldsymbol{y}$ je jeden ze sloupců matice $\mathbb{A}$.

    (c) $\boldsymbol{y}$ lze zapsat jako lineární kombinaci sloupců matice $\mathbb{A}$.

    (d) $h(\mathbb{A}|\boldsymbol{y}) \leq h(\mathbb{A})$.

14. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($U$ a $V$ jsou vektorové prostory, $\dim V = n$, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení.)

    (a) $L$ je prosté.

    (b) $\dim U \leq n$.

    (c) $\dim U = n$ a $L$ je na.

    (d) $\dim U = \dim \operatorname{Im}(L)$.

15. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $n \times n$, $Q$ kvadratická forma reprezentovaná $\mathbb{A}$.)

    (a) $\mathbb{A}$ je negativně definitní.

    (b) Všechny prvky na diagonále $\mathbb{A}$ jsou záporné.

    (c) $Q(\boldsymbol{e}^i) < 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

    (d) $\det \mathbb{A} \neq 0$.

16. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je matice typu $n \times n$.)

    (a) $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ je regulární matice.

    (b) Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ je $\mathbb{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}$.

    (c) 1 není vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

    (d) 1 není vlastní číslo matice $\mathbb{A}^T$.

17. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($f$ je funkce třídy $C^2$ na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$.)

    (a) $f$ má v $\boldsymbol{a}$ lokální maximum.

    (b) Hessova matice $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je negativně semidefinitní.

    (c) $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod funkce $f$.

    (d) Platí (2) a (3).

18. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($f$ je funkce třídy $C^2$ na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod funkce $f$.)

    (a) $f$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální maximum.

    (b) $f$ je konkávní na okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

    (c) Hessova matice $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je negativně definitní.

    (d) Hessova matice $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je negativně semidefinitní.

19. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($f$ je funkce třídy $C^2$ na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod funkce $f$.)

    (a) $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkce $f$.

    (b) Hessova matice funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je indefinitní.

    (c) Hessova matice funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ není pozitivně definitní ani negativně definitní.

    (d) $\boldsymbol{a}$ není bodem ostrého lokálního extrému funkce $f$.