Komentář k oddílu IX.5 – vlastní čísla a vlastní vektory

K definicím, významu oddílu a Větě IX.18:

- Je-li $\mathbb{A}$ čtvercová matice, pak nenulový (sloupcový) vektor $\boldsymbol{x}$ je vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$, pokud $\mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je násobkem vektoru $\boldsymbol{x}$.

  Důležitý je předpoklad nenulovosti $\boldsymbol{x}$ ($\mathbb{A}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ platí automaticky). Pokud $\boldsymbol{x}$ je nenulový a $\mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je násobkem vektoru $\boldsymbol{x}$, znamená to, že existuje číslo λ, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Toto číslo λ je zároveň jednoznačně určeno (právě díky tomu, že $\boldsymbol{x}$ je nenulový).

  Čísla λ, která se vyskytují v tomto kontextu, se nazývají vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

  Tedy – číslo λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, pokud k němu existuje nějaký příslušný vlastní vektor.

- V tomto oddílu budeme pracovat v komplexním oboru – matice uvažujeme komplexní, vlastní čísla i vlastní vektory také uvažujeme komplexní.

  Důvod je ten, že reálné matice nemusí mít reálná vlastní čísla a reálné vlastní vektory (příklad bude níže). V některých důležitých případech však stačí reálný obor (viz Věta IX.19 níže).

- Jedno ze základních použití matic je reprezentace lineárních zobrazení. Komplexní matice $\mathbb{A} \in M_{\mathbf{C}}(n \times n)$ reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ dané vzorcem $L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$.

  Pokud $\lambda \in \mathbf{C}$ je vlastní číslo a $\boldsymbol{x}$ příslušný vlastní vektor, pak $L(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Tedy na podporostoru $\mathrm{lin}_{\mathbf{C}}\{\boldsymbol{x}\}$ je zobrazení L velmi jednoduché – každému vektoru přiřadí jeho λ-násobek. Speciálně tento podprostor se zobrazí sám do sebe (tedy je invariantní pro L).

  Toto je jedna z motivací pro studium vlastních čísel – jednodušší vyjádření lineárního zobrazení. Více si o tom řekneme u Věty IX.20.

- Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$.

  Pokud je $\boldsymbol{x}$ vlastním vektorem příslušným λ, pak každý nenulový násobek $\boldsymbol{x}$ je také vlastním vektorem, protože

  $$\mathbb{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\mathbb{A}\boldsymbol{x}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}).$$

Pokud $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou vlastní vektory příslušné λ, pak

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \mathbb{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$

Tedy, v případě, že $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$, je $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ také vlastní vektor.

Proto množina vlastních vektorů příslušných k danému vlastnímu číslu λ je podprostorem $\mathbf{C}^n$ s vynechaným nulovým vektorem.

- Důkaz bodu (i) Věty IX.18:

  Nechť $\lambda \in \mathbf{C}$. Pak platí:

$$
\begin{array}{cl}
\lambda \text{ je vlastní číslo matice } \mathbb{A} & \\
\Updownarrow & \text{z definice vlastního čísla} \\
\exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\} : \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} & \\
\Updownarrow & \text{od obou stran odečteme } \mathbb{A}\boldsymbol{x} \\
\exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\} : \lambda\boldsymbol{x} - \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} & \\
\Updownarrow & \text{z vlastností maticového násobení} \\
\exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\} : (\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} & \\
\Updownarrow & \text{podle důsledku Věty IX.6} \\
\text{zobrazení reprezentované maticí} & \\
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} \text{ není prosté} & \\
\Updownarrow & \text{podle Vět VI.19 a VI.15} \\
\text{Matice } \lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} \text{ není regulární} & \\
\Updownarrow & \text{podle Věty VI.11} \\
\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0 &
\end{array}
$$

- Bod (ii) Věty IX.18 dokážeme indukcí z definice determinantu.

  Nejprve dokážeme (taktéž indukcí) následující pomocné tvrzení:

  Lemma: *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou čtvercové matice řádu n. Pak funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})$ je polynom stupně nejvýše n.*

  Důkaz indukcí:

  Krok 1, $n = 1$: Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou řádu 1. Označme jejich jediné prvky a a b. Pak

$$\det(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda a + b,$$

  což je polynom stupně nejvýše 1.

Krok 2, $n \to n+1$: Předpokládejme, že trvrzení platí pro matice řádu n. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})$ a $\mathbb{B} = (b_{ij})$ jsou matice řádu $n+1$. Podle definice determinantu je:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (\lambda a_{i1} + b_{i1}) \det(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \underbrace{\underbrace{(\lambda a_{i1} + b_{i1})}_{\substack{\text{polynom} \\ \text{stupně } \leq 1}} \underbrace{\det(\lambda\mathbb{A}_{i1} + \mathbb{B}_{i1})}_{\substack{\text{polynom stupně } \leq n \\ \text{dle ind. předp.}}}}_{\text{polynom stupně } \leq n+1}\end{aligned}$$

To dokončuje důkaz indukčního kroku.

Tím máme dokázáno pomocné tvrzení a můžeme provést vlastní důkaz bodu (ii). Postupujeme opět indukcí.

Krok 1, $n = 1$: Nechť $\mathbb{A}$ je řádu 1. Označme její jediný prvek a Pak

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \lambda - a,$$

což je polynom stupně 1 s koeficientem 1 u λ^1.

Krok 2, $n \to n+1$: Předpokládejme, že trvrzení platí pro matice řádu n. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matice řádu $n+1$. Podle definice determinantu je:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) &= (-1)^{1+1} (\lambda - a_{11}) \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})_{11} \\ &\qquad + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})_{i1} \\ &= (\lambda - a_{11}) \cdot \underbrace{\det(\lambda\mathbb{I}_{11} - \mathbb{A}_{11})}_{\substack{\text{polynom stupně } n \\ \text{s hlavním koefic. } 1 \\ \text{dle ind. předp.}}} \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \underbrace{\det(\lambda\mathbb{I}_{i1} - \mathbb{A}_{i1})}_{\substack{\text{polynom stupně } \leq n \\ \text{dle Lemmatu}}} .\end{aligned}$$

Uvědomme si, že $\mathbb{I}_{11}$ je jednotková matice řádu n.

Pokud polynom stupně n s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny vynásobíme $(\lambda - a_1 1)$, dostaneme polynom stupně $n+1$ s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny. Pokud pak k němu přičteme polynom stupně nejvýše n, výsledek bude opět polynom stupně $n+1$ s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny.

To dokončuje důkaz indukčního kroku, a tedy bodu (ii).

- Bod (iii) plyne z bodu (ii), protože polynom stupně n má nejvýše n kořenů (viz Věta VIII.18 a následující poznámka).

- Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ se nazývá charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$ a v algebře hraje důležitou roli.

  Jeho kořeny jsou tedy vlastní čísla matice $\mathbb{A}$, přičemž násobnosti daného kořenu se pak říká násobnost příslušného vlastního čísla.

  Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla, přičemž v tomto seznamu se každé opakuje tolikrát, kolik je jeho násobnost.

  Z Věty VIII.18 pak plyne, že

$$\det(\lambda I - \mathbb{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

  Pokud dosadíme $\lambda = 0$, vidíme, že

$$\underbrace{\det(-\mathbb{A})}_{(-1)^n \det \mathbb{A}} = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n),$$

  tedy $\det \mathbb{A} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

  Neboli, součin vlastních čísel, pokud každé počítáme tolikrát, kolik je jejich násobnost, je roven determinantu matice $\mathbb{A}$.

  Dále je vidět, že koeficient u λ^{n-1} v charakteristickém polynomu je roven

$$-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

  Lze ukázat, že zároveň je roven

$$-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}),$$

  a to opět indukcí z definice determinantu. (Dělat to nebudeme, je třeba postupovat trochu pečlivěji než výše.)

Je tedy

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- Příklady:

  1. Je-li $\mathbb{A}$ diagonální matice, pak vlastní čísla jsou právě prvky na diagonále.
  2. Je-li $\mathbb{A}$ horní nebo dolní trojúhelníková matice, vlastní čísla jsou rovněž právě prvky na diagonále.
  3. Pokud $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak charakteristický polynom je $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \lambda^2 + 1$. Máme tedy dvojici vlastních čísel $i, -i$.

     Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu i najdeme řešením soustavy

     $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

     neboli

     $$\begin{aligned} y &= ix \\ -x &= iy \end{aligned}$$

     Tato soustava má nekonečně mnoho řešení (to není překvapivé, i je vlastní číslo), a to násobky vektoru $[1, i]$. Tedy všechny vlastní vektory jsou tvaru

     $$c \cdot [1, i], \qquad c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

     Podobně, vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $-i$ najdeme řešením soustavy

     $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

     neboli

     $$\begin{aligned} y &= -ix \\ -x &= -iy \end{aligned}$$

     Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, a to násobky vektoru $[1, -i]$. Tedy všechny vlastní vektory jsou tvaru

     $$c \cdot [1, -i], \qquad c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Vlastní čísla a symetrické matice:

- Třebaže i o obecné čtvercové matici její vlastní čísla a vlastní vektory leccos vypovídají, pro symetrické matice toho vypovídají mnohem více.

  Svědčí o tom hlavně Věta IX.20, která zhruba řečeno říká, že symetrickou matici lze zrekonstruovat, pokud známe její vlastní čísla a vlastní vektory.

  Prvním krokem je však Věta IX.19.

- Věta IX.19: Tato věta říká, že vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná. To je rozdíl oproti obecné reálné matici (viz příklad 3 výše).

  Důkaz: Nechť $\mathbb{A}$ je reálná symetrická matice a $\lambda \in \mathbf{C}$ je libovolné její vlastní číslo. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ je nějaký vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ. To znamená, že $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ a $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

  Krok 1: $\overline{\lambda}$ je také vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ a $\overline{\boldsymbol{x}}$ je k němu příslušný vlastní vektor.

  Přitom aplikací komplexního sdružení na vektor (či obecněji na matici) rozumíme použití komplexního sdružení na každou složku.

  Protože $\mathbb{A}$ je reálná, z definice maticového násobení a z vlastností komplexně sdružených čísel (viz oddíl VIII.4) plyne

  $$\mathbb{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\mathbb{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\mathbb{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

  První rovnost plyne z toho, že $\mathbb{A}$ má reálné složky.

  Druhá rovnost plyne z definice maticového násobení a vlastností komplexního sdružení (viz oddíl VIII.4).

  Třetí rovnost plyne z toho, že $\boldsymbol{x}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ.

  Poslední rovnost plyne opět z vlastností komplexního sdružení.

  Tím je první krok dokázán. Zatím jsme použili jen to, že $\mathbb{A}$ je reálná matice, nikoli to, že je symetrická.

Krok 2: Spočteme $\overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}^T \mathbb{A}\overline{\boldsymbol{x}}$:

V obou případech je výsledek matice 1×1, tedy číslo. Výpočet:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T \cdot \lambda\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \lambda \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot x_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2;$$
$$\boldsymbol{x}^T \mathbb{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T \cdot \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda} \cdot \boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{x_j} = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

V obou případech první rovnost plyne z toho, že $\boldsymbol{x}$ a $\overline{\boldsymbol{x}}$ jsou vlastní vektory příslušné k číslům λ a $\overline{\lambda}$. Zbylé rovnosti pak plynou z vlastností maticového násobení a z vlastností komplexního sdružení.

Krok 3: Dvě čísla spočtená v Kroku 2 jsou stejná.

Protože $\overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je číslo, tj. matice 1×1, je to symetrická matice.

Tedy

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbb{A}\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}}^T \mathbb{A}\boldsymbol{x})^T \overset{VI.3}{=} \boldsymbol{x}^T \mathbb{A}^T (\overline{\boldsymbol{x}}^T)^T \overset{\mathbb{A}^T=\mathbb{A}}{=} \boldsymbol{x}^T \mathbb{A}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

Použili jsme vlastnosti transponovaných matic a symetrii matice $\mathbb{A}$.

Krok 4: Závěr:

Z Kroků 2 a 3 dostaneme

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

Protože $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, je $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0$, a tedy tímto výrazem můžeme rovnost vydělit.

Tak dostaneme $\lambda = \overline{\lambda}$, tedy λ je reálné.

Tím je důkaz hotov.

- K pojmu ortogonální matice:

Reálná čtvercová matice $\mathbb{Q}$ řádu n je ortogonální, pokud $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$.

Ekvivalentně, pokud je to regulární matice a inverzní matice se rovná matici transponované (tj. $\mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{Q}^T$).

Podle poznámky z oddílu VIII.2 (dokázané v oddílu VIII.5) stačí, aby platila jedna z rovností $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ nebo $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$. Druhá z rovností pak automaticky platí též.

Vysvětleme si ještě, proč se takové matici říká ortogonální:

Označme $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ sloupce matice $\mathbb{Q}$.

Pak matice $\mathbb{Q}^T$ má řádky $\boldsymbol{q}_1^T, \ldots, \boldsymbol{q}_n^T$.

Součin $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}$ má na místě ij součin i-tého řádku matice $\mathbb{Q}^T$ a j-tého sloupce matice $\mathbb{Q}$, tj.

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_j = < \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j > .$$

Protože $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{I}$, dostáváme

$$< \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j > = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Tedy, s použitím terminologie z oddílu IX.3 má každý sloupec normu 1 ($\|\boldsymbol{q}_i\| = 1$) a každé dva různé sloupce jsou na sebe kolmé (jiným slovem ortogonální).

Tedy – ortogonální matice je taková, jejíž všechny sloupce mají normu 1 a jsou na sebe navzájem kolmé.

Totéž platí i pro řádky (použije se rovnost $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$).

- Věta IX.20 a její tvrzení:

  Nechť $\mathbb{A}$ je reálná symetrická matice řádu n. Z Věty IX.19 víme, že její vlastní čísla jsou reálná.

  Protože vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu a ten má stupeň n (Věta IX.18), je vlastních čísel n, pokud každé počítáme s jeho násobností.

  Nechť tedy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$, přičemž každé se opakuje v seznamu právě tolikrát, kolik je jeho násobnost.

  Věta IX.20 říká, že pak existuje ortogonální matice $\mathbb{Q}$, pro kterou platí

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T.$$

Co tato rovnost říká: Protože $\mathbb{Q}$ je ortogonální, tj. matice $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^T$ jsou navzájem inverzní, je tato rovnost ekvivalentní rovnosti, která se z ní dostane vynásobením maticí $\mathbb{Q}$ zprava, tj.

$$\mathbb{A}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pokud sloupce matice $\mathbb{Q}$ označíme $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$, pak součin na levé straně je matice se sloupci $\mathbb{A}\boldsymbol{q}_1, \dots, \mathbb{A}\boldsymbol{q}_n$ a součin na pravé straně je matice se sloupci $\lambda_1\boldsymbol{q}_1, \dots, \lambda_n\boldsymbol{q}_n$.

To znamená, že $\mathbb{A}\boldsymbol{q}_j = \lambda_j\boldsymbol{q}_j$, neboli $\boldsymbol{q}_j$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_j.

- Poznámky k důkazu Věty IX.20: Důkaz provádět nebudeme, nicméně předchozí analýza naznačuje, jak najít matici $\mathbb{Q}$ a tím větu dokázat:

  Najdeme vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a jim příslušné vlastní vektory. Z nich jakožto sloupců poskládáme matici $\mathbb{Q}$. Jen musíme zajistit, aby byla ortogonální.

  K tomu důležitý krok je uvědomit si, že vlastní vektory příslušné dvěma různým vlastním číslům jsou kolmé. To je ovšem snadné pomocí postupu podobnému tomu použitému v důkazu Věty IX.19:

  Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou dvě vlastní čísla a $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ jsou jim příslušné vlastní vektory. Pak platí:

$$\boldsymbol{x}_2^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \cdot \lambda_1\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 < \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 >,$$
$$\boldsymbol{x}_1^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^T \cdot \lambda_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 < \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 > .$$

  Protože $\boldsymbol{x}_1^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2$ je matice typu 1×1, je symetrická, a tedy

$$\boldsymbol{x}_1^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{x}_1^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2)^T \overset{VI.3}{=} \boldsymbol{x}_2^T\mathbb{A}^T(\boldsymbol{x}_1^T)^T \overset{\mathbb{A}^T=\mathbb{A}}{=} \boldsymbol{x}_2^T\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1,$$

  tedy

$$\lambda_2 < \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 >= \lambda_1 < \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 > .$$

  Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je $< \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 >= 0$. A to je ono.

  To ovšem není celý důkaz věty, ještě je třeba ošetřit vlastní vektory k vícenásobným vlastním číslům. To však dělat nebudeme.

- Použití Věty IX.20 pro reprezentaci lineárního zobrazení.

  Jednou z aplikací matic je fakt, že reprezentují lineární zobrazení. Věta IX.20 umožňuje zobrazení reprezentované symetrickou maticí vyjádřit v jednoduchém tvaru.

  Pokud stejně jako výše označíme $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ sloupce matice $\mathbb{Q}$, pak pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}\boldsymbol{x} &= \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \boldsymbol{q}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1 > \\ < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2 > \\ \vdots \\ < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_n > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1 > \\ \lambda_2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2 > \\ \vdots \\ \lambda_n < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_n > \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_j > \boldsymbol{q}_j .
\end{aligned}
$$

  Tedy

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_j > \boldsymbol{q}_j, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n .
$$

- Použití Věty IX.20 k výpočtu mocnin matice $\mathbb{A}$:

Pokud $\mathbb{A}$ je v tvaru z věty, pak pro každé $k \in \mathbf{N}$ máme

$$\mathbb{A}^k = \underbrace{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} \cdots \mathbb{A}}_{k\text{-krát}}$$

$$= \underbrace{\mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{\mathbb{Q}^T \cdot \mathbb{Q}}_{=\mathbb{I}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T \cdots \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T}_{k\text{-krát}}$$

$$= \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k \mathbb{Q}^T = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T.$$

Odtud už snadno plyne, že pro každý polynom $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ platí

$$(p(\mathbb{A}) =) \quad a_m \mathbb{A}^m + a_{m-1} \mathbb{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \mathbb{A} + a_0 \mathbb{I} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix} \mathbb{Q}^T.$$

- Množině všech vlastních čísel matice se říká spektrum matice a Větě IX.20 se říká věta o spektrálním rozkladu symetrické matice.
- Důsledek Věty IX.20: Protože matice $\mathbb{Q}$ je regulární, je povaha (definitnost) matice $\mathbb{A}$ stejná jako povaha (definitnost) diagonální matice, která má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbb{A}$. (Viz Věta IX.15 a její důkaz).

  Proto je povaha (definitnost) matice $\mathbb{A}$ určena znaménky vlastních čísel (díky Větičce IX.11).