Komentář k oddílu IX.1 – vektorové prostory

K definici vektorového prostoru:

- Vektorový prostor je definován axiomaticky, jak je v matematice časté.

  Je to množina, na které jsou definovány jisté operace, které mají předepsané vlastnosti.

  Tedy každá množina s příslušnými operacemi, která má ony vlastnosti, je vektorovým prostorem.

  Výhoda tohoto abstraktního přístupu je, že věty dokázané o vektorových prostorech, se pak dají použít v mnoha konkrétních situacích.

  Příklady vektorových prostorů jsou třeba $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, množina všech posloupností nebo množina spojitých funkcí na daném intervalu. Podrobněji o tom níže.

- Uvažujeme dva druhy vektorových prostorů – reálné a komplexní. Abychom je mohli uvažovat najednou, zavádíme značení $\mathbf{K}$ – to označuje jednu z množin $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$.

- Vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ je tedy množina V, na níž jsou definovány dvě operace $+$ a $\cdot$, které mají jisté vlastnosti.

- Operace $+$, neboli sčítání, je operace, která dvojici prvků $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ přiřadí jejich součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, tedy nějaký další prvek V.

  Vlastnosti (i)–(iv) se týkají pouze sčítání. Proberme je:

(i) a (ii): Tyto dvě vlastnosti říkají, že sčítání prvků V je komutativní a asociativní, tedy nezávisí na pořadí a na uzávorkování.

(iii): Tato vlastnost říká, že v prostoru V existuje nulový prvek, tj. takový prvek, jehož přičtení žádný prvek nezmění. To přesně říká rovnost $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ – přičtením $\boldsymbol{o}$ k $\boldsymbol{v}$ se $\boldsymbol{v}$ nezmění.

Nulový prvek je jenom jeden. Kdyby totiž byly dva nulové prvky $\boldsymbol{o}_1$ a $\boldsymbol{o}_2$, pak by platilo

$$\boldsymbol{o}_1 \overset{\boldsymbol{o}_2 \text{ je nulový prvek}}{=} \boldsymbol{o}_1 + \boldsymbol{o}_2 \overset{\boldsymbol{o}_1 \text{ je nulový prvek}}{=} \boldsymbol{o}_2,$$

kde také používáme vlastnost (i), tj. komutativitu sčítání ($\boldsymbol{o}_1 + \boldsymbol{o}_2$ je totéž, co $\boldsymbol{o}_2 + \boldsymbol{o}_1$).

(iv): Tato vlastnost říká, že ke každému prvku $\boldsymbol{v} \in V$ existuje opačný prvek, tj. takový, po jehož přičtení k $\boldsymbol{v}$ dostaneme nulový prvek (tj. takové $\boldsymbol{w} \in V$, že $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$).

Ke každému prvku $\boldsymbol{v} \in V$ existuje jen jeden opačný prvek. Kdyby totiž existovaly dva opačné prvky $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in V$, pak se musí rovnat, protože by platilo:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{w}_1 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_2) \overset{(ii)}{=} (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2.$$

První rovnost plyne z toho, že $\boldsymbol{o}$ je nulový prvek, druhá z toho, že $\boldsymbol{w}_2$ je opačný prvek k $\boldsymbol{v}$, třetí plyne z asociativity sčítání, čtvrtá z toho, že $\boldsymbol{w}_1$ je opačný prvek k $\boldsymbol{v}$ a poslední z toho, že $\boldsymbol{o}$ je nulový prvek. (Taktéž opakovaně používáme komutativitu sčítání.)

Opačný prvek k prvku $\boldsymbol{v}$ budeme značit $-\boldsymbol{v}$.

- Operace $\cdot$ není vlastně přímo operace na V, ale operace, která číslu $a \in \mathbf{K}$ (tedy reálnému nebo komplexnímu) a prvku $\boldsymbol{v} \in V$ přiřadí prvek $a \cdot \boldsymbol{v} \in V$ (a-násobek prvku $\boldsymbol{v}$).

  Vlastnosti (v)–(viii) se týkají této operace a jejího vztahu ke sčítání. Proberme je.

(viii): Tato vlastnost říká, že 1-násobek vektoru $\boldsymbol{v}$ je zase vektor $\boldsymbol{v}$.

(v): Tato vlastnost říká, že a-násobek b-násobku prvku $\boldsymbol{v}$ je totéž, co ab-násobek prvku $\boldsymbol{v}$.

(vi) a (vi): Tyto vlastnosti jsou dvě verze distributivity – říkají, že lze roznásobovat závorky či vytýkat před závorku.

- Prvkům vektorového prostoru se obvykle říká vektory.

- Několik příkladů vektorových prostorů:

  1. $\mathbf{R}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ (s obvyklým sčítáním a násobením).

     Že tyto operace mají vlastnosti (i)–(viii) dobře víme, plyne to ze základních vlastností reálných čísel v oddílu I.3.

     Nulovým prvkem je 0, opačným prvkem k $v \in \mathbf{R}$ je opačné číslo $-v$.

2. $\mathbf{C}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ (s obvyklým sčítáním a násobením). Vlastnosti operací byly opět zmíněny v oddílu I.3.

   Nulovým prvkem je $0 = 0 + 0i$, opačným prvkem k prvku $a + bi$ je opačné číslo $-a - bi$.

3. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ je $\mathbf{R}^n$ vektorový prostor nad $\mathbf{R}$, pokud sčítání prvků $\mathbf{R}^n$ a násobení prvku $\mathbf{R}^n$ reálným číslem definujeme jako v oddílu V.1 (tj. po souřadnicích).

   To je vlastně speciální případ množiny $M(m \times n)$ – množina matic $m \times n$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$, pokud sčítání matic a násobení matice číslem definujeme po složkách, tj. stejně jako v oddílu VI.1.

   Vlastnosti (i)–(viii) nyní plynou z Věty VI.1. Nulový prvek je nulová matice (matice, jejíž všechny složky jsou nulové). Opačný prvek k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matice $-\mathbb{A} = (-a_{ij})$.

   Protože $\mathbf{R}^n$ lze interpretovat jako $M(1 \times n)$, vidíme, že $\mathbf{R}^n$ je opravdu vektorový prostor. Nulový prvek je počátek – $\boldsymbol{o} = [0, 0, \dots, 0]$, opačný prvek k prvku $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ je prvek $-\boldsymbol{x} = [-x_1, -x_2, \dots, -x_n]$.

4. Množina komplexních matic typu $m \times n$, $M_{\mathbf{C}}(m \times n)$, je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, pokud sčítání matic a násobení matice komplexním číslem definujeme po složkách, tj. analogicky jako pro reálné matice v oddílu VI.1.

   I v tomto případě platí analogie Věty VI.1, která se dokáže stejně – jen místo vlastností reálných čísel se použijí tytéž vlastnosti komplexních čísel.

   I v tomto případě nulový prvek je nulová matice (matice, jejíž všechny složky jsou nulové) a opačný prvek k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matice $-\mathbb{A} = (-a_{ij})$.

5. Množina $\mathbf{C}^n$ všech uspořádaných n-tic komplexních čísel je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, pokud sčítání prvků $\mathbf{C}^n$ a násobení prvku $\mathbf{C}^n$ komplexním číslem definujeme po souřadnicích (tj. analogicky jako v $\mathbf{R}^n$).

   $\mathbf{C}^n$ lze totiž interpretovat jako $M_{\mathbf{C}}(1 \times n)$. Nulový prvek je opět počátek – $\boldsymbol{o} = [0, 0, \dots, 0]$, opačný prvek k prvku $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{C}^n$ je prvek $-\boldsymbol{x} = [-x_1, -x_2, \dots, -x_n]$.

6. Nechť $\mathfrak{s}$ je množina všech posloupností reálných čísel. Pokud definujeme součet dvou posloupností a násobek posloupnosti reálným

číslem jako v oddílu II.1 (tj. po členech), pak je $\mathfrak{s}$ vektorový prostor na $\mathbf{R}$.

Nulový prvek je konstantní nulová posloupnost $\{0\}_{n=1}^{\infty}$. Opačný prvek k posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $-\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = -\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Díky tomu, že operace jsou definovány po jednotlivých členech, plynou všechny vlastnosti z vlastností reálných čísel. Ilustrujme si to na komutativitě sčítání:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}+\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n+a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}+\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

První a třetí rovnost jsou použitím definice součtu posloupností, druhá rovnost plyne z komutativity sčítání reálných čísel.

7. Analogicky $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$, množina všech posloupností komplexních čísel, je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ (s analogickými operacemi).
8. Nechť M je nějaká (neprázdná) množina. Označme $\mathcal{F}(M)$ množinu všech reálných funkcí definovaných na M. Pokud součet dvou funkcí a násobek funkce reálným číslem definujeme obvyklým způsobem, tj.

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad && x \in M, \quad f,g \in \mathcal{F}(M), \\ (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x), && x \in M, \quad f \in \mathcal{F}(M), \lambda \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

dostaneme vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

Nulový prvek je konstantní nulová funkce, opačný prvek k funkci f je funkce $-f$ definovaná vzorcem $(-f)(x) = -f(x)$, $x \in M$.

Vlastnosti (i)–(viii) plynou z vlastností reálných čísel. Ilustrujme to například na komutativititě sčítání. Pokud $f, g \in \mathcal{F}(M)$ a $x \in M$, pak

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x).$$

Tedy $f+g = g+f$.

9. Analogicky, $\mathcal{F}_{\mathbf{C}}(M)$, množina všech komplexních funkcí na M, je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ (s analogickými operacemi).

- Větička IX.1 obsahuje dvě tvrzení, která jsou přirozená a často se hodí. První říká, že 0-násobek každého prvku vektorového prostoru je roven nulovému prvku. Druhá, že opačný prvek se rovná (-1)-násobku.

  Důkaz:

(i): Důkaz plyne například z výpočtu (uvádíme vždy vlastnosti z definice vektorového prostoru, které používáme):

$$\begin{aligned}0\cdot\boldsymbol{v} &\overset{(iii)}{=} 0\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o} \overset{(iv)}{=} 0\cdot\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})) \overset{(ii)}{=} (0\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v})\\ &\overset{(viii)}{=} (0\cdot\boldsymbol{v}+1\cdot\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v}) \overset{(vi)}{=} (0+1)\cdot\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})\\ &= 1\cdot\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) \overset{(viii)}{=} \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) \overset{(iv)}{=} \boldsymbol{o}.\end{aligned}$$

(ii): Chceme-li ukázat, že $(-1)\cdot\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$, tj. že $(-1)\cdot\boldsymbol{v}$ je opačný prvek k $\boldsymbol{v}$, stačí ukázat, že $(-1)\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$.

Počítejme tedy:

$$(-1)\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=(-1)\cdot\boldsymbol{v}+1\cdot\boldsymbol{v}=(-1+1)\cdot\boldsymbol{v}=0\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}.$$

Přičemž jsme postupně použili vlastnosti (viii) a (vi) z definice vektorového prostoru a již dokázaný bod (i).

K definici podprostoru:

- Je-li V vektorový prostor na $\mathbf{K}$, pak jeho vektorový podprostor (krátce podprostor) je neprázdná podmnožina $U\subset V$, která je „uzavřená na operace“.

  To znamená, že součet libovolných dvou prvků z U patří opět do U a libovolný násobek nějakého prvku z U patří také do U.

- Podprostor vždy obsahuje nulový vektor. To plyne z toho, že podprostor musí být neprázdný, tedy obsahuje nějaký vektor $\boldsymbol{u}$. Pak ovšem obsahuje i vektor $0\cdot\boldsymbol{u}$, což se podle Větičky IX.1 rovná $\boldsymbol{o}$.

- Pokud U je podprostor vektorového prostoru V, pak pro každé $\boldsymbol{u}\in U$ opačný prvek $-\boldsymbol{u}$ patří také do U. Opět to plyne z Větičky IX.1, která říká, že $-\boldsymbol{u}=(-1)\cdot\boldsymbol{u}$.

- Pokud U je podprostor vektorového prostoru V, pak je to také vektorový prostor.

  Z definice totiž plyne, že operace definované na V fungují i na U (součet dvou prvků U patří do U, násobek prvku U patří do U).

  Vlastnosti (i),(ii),(v)–(vi) plynou z vlastností V. Vlastnosti (iii) a (iv) plynou z předchozích dvou bodů, kde jsme vysvětlili, že $\boldsymbol{o}\in U$ a pro každé $\boldsymbol{u}\in U$ je $-\boldsymbol{u}\in U$.

- Několik příkladů podprostorů (a tedy další příklady vektorových prostorů):

  1. Pokud V je libovolný vektorový prostor, pak existují dva extrémní podprostory:

     Celý prostor V je největším podprostorem.

     Nejmenším podprostorem je jednoprvková množina $\{\boldsymbol{o}\}$. Říkáme jí *triválni vektorový prostor*.

  2. Mezi podprostory $\mathbf{R}^2$ patří například následující množiny:

     – $\{[x,0]\colon x \in \mathbf{R}\}$ (tj. osa x),
     – $\{[0,x]\colon x \in \mathbf{R}\}$ (tj. osa y),
     – $\{[x,x]\colon x \in \mathbf{R}\}$ (tj. osa prvního a třetího kvadrantu),

     obecně každá přímka procházející počátkem.

     Ukažme si to pro třetí množinu (osu prvního a třetího kvadrantu): Je neprázdná, protože obsahuje bod $[0,0]$. Součet dvou prvků z této přímky do ní opět patří, stejně tak jako násobek – to je zřejmé z definic.

     Pro zbylé množiny je důkaz obdobný.

  3. Je-li $\mathcal{F}(M)$ vektorový prostor reálných funkcí na množině M, pak

     $$B(M) = \{f \in \mathcal{F}(M)\colon f \text{ je omezená na } M\}$$

     je podprostor prostoru $\mathcal{F}(M)$.

     $B(M)$ je totiž neprázdná množina, protože konstantní nulová funkce patří do $B(M)$. Dále, součet dvou omezených funkcí je zase omezená funkce (pokud $|f| \leq C_1$ a $|g| \leq C_2$ na M, pak $|f+g| \leq |f| + |g| \leq C_1 + C_2$ na M) a násobek omezené funkce je opět omezená funkce (pokud $|f| \leq C$ na M a $\lambda \in \mathbf{R}$, pak $|\lambda f| = |\lambda| \cdot |f| \leq |\lambda| C$ na M.

  4. Je-li $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ vektorový prostor reálných funkcí na $\mathbf{R}$, pak $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, podmnožina tvořena spojitými funkcemi, je podprostorem $\mathcal{F}(\mathbf{R})$.

     $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ je neprázdná množina, protože konstantní nulová funkce je spojitá. Dále součet dvou spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je spojitá funkce (to je důsledek věty o aritmetice limit (viz Důsledek Věty IV.4).

5. Množina $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ všech funkcí třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbf{R}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ (a tedy též podprostorem prostoru $\mathcal{F}(M)$).

   Každá funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbf{R}$ je spojitá na $\mathbf{R}$ (viz Věta IV.12). Proto je $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$. Dále, $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ je neprázdná množina, protože konstantní nulová funkce je třídy $\mathcal{C}^1$. Součet dvou funkcí třídy $\mathcal{C}^1$ je opět funkce třídy $\mathcal{C}^1$, stejně tak násobek funkce třídy $\mathcal{C}^1$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$. (To plyne z věty o aritmetice derivací – viz Věta IV.13 – a z důsledku věty o aritmetice limit – viz Důsledek Věty IV.4.)

6. Množina všech konvergentních posloupností reálných čísel (značí se c) je podprostorem prostoru $\mathfrak{s}$ všech posloupností.

   c je neprázdná množina, protože konstantní nulová posloupnost je konvergentní. Dále, součet dvou konvergentních posloupností je konvergentní posloupnost a násobek konvergentní posloupnosti je konvergentní posloupnost (podle Věty o aritmetice limit, viz Věta II.4).

7. Množina všech posloupností reálných čísel, které mají limitu 0, (značí se c_0) je podprostorem prostoru c (a také prostoru $\mathfrak{s}$ všech posloupností).

   c_0 je neprázdná množina, protože konstantní nulová posloupnost má limitu 0. Dále, součet dvou posloupností s limitou 0 je posloupnost s limitou 0 a násobek posloupnosti s limitou 0 je posloupnost s limitou 0 (podle Věty o aritmetice limit, viz Věta II.4).

K lineárním kombinacím atp.:

- Definice lineární kombinace, triviální lineární kombinace a netriviální kombinace jsou zcela analogické příslušným definicím z oddílu VI.2.

  Liší se to pouze v tom, že uvažujeme vektory v obecném vektorovém prostoru a že koeficienty uvažujeme z množiny $\mathbf{K}$ (tj. z $\mathbf{R}$ pro reálné prostory a z $\mathbf{C}$ pro komplexní prostory).

  Je opět třeba rozlišovat mezi lineární kombinací (tj. výrazem jistého tvaru) a jejím výsledkem (tj. vektorem, který se dostane výpočtem výrazu) – viz podrobné vysvětlení v komentáři k oddílu VI.2.

- Pokud V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou prvky V, pak $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ je množina všech vektorů, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$, tj. ve tvaru

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k,$$

kde $\alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbf{K}$.

- Věta IX.2 říká, že $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ je podprostor prostoru V. Dokažme to:

  Nulový vektor do $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ patří, protože

  $$\boldsymbol{o} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_k,$$

  tedy dá se vyjádřit jako (triviální) lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$.

  Pokud $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$, tj. existují $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbf{K}$, pro která platí

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k, \\ \boldsymbol{v} &= \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \beta_k \boldsymbol{v}_k, \end{aligned}$$

  pak

  $$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)\boldsymbol{v}_k,$$

  tedy $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$.

  Pokud $\lambda \in \mathbf{K}$ a $\boldsymbol{u} \in \mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$, tj. existují $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{K}$, pro která platí

  $$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k,$$

  pak

  $$\lambda \boldsymbol{u} = (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda\alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (\lambda\alpha_k)\boldsymbol{v}_k,$$

  tedy $\alpha \boldsymbol{u} \in \mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$.

- Díky Větě IX.2 je opravdu smysluplné nazývat $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ vektorovým podprostorem generovaným vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$.

- Obecněji, pokud $M \subset V$ je nějaká podmnožina, pak $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}} M$ je množina všech vektorů, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci nějakých prvků M.

  I tato množina je podprostorem V:

Pokud $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$, pak existují $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \in M$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbf{K}$, pro která platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k, \\ \boldsymbol{v} &= \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_m\boldsymbol{v}_m. \end{aligned}$$

Tedy

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k + \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_m\boldsymbol{v}_m$$

lze také vyjádřit jako lineární kombinaci nějakých prvků M, tedy $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \operatorname{lin}_K M$.

Pokud $\lambda \in \mathbf{K}$ a $\boldsymbol{u} \in \operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M$, pak existují $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in M$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{K}$, pro která platí

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k.$$

Pak

$$\lambda\boldsymbol{u} = (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda\alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\lambda\alpha_k)\boldsymbol{v}_k,$$

tedy $\alpha\boldsymbol{u} \in \operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M$.

Zbývá ukázat, že $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M$ je neprázdná. Pokud $M \neq \emptyset$, pak zřejmě $M \subset \operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M$, a tedy je tato množina neprázdná.

Případ, kdy $M = \emptyset$, je výjimečný. Pak se obvykle definuje $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M = \{\boldsymbol{o}\}$ (jako hodnota „prázdné lineární kombinace"). To má význam pro to, aby se v různých tvrzeních nemusel výjimečný případ vylučovat.

- Jiný pohled na $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} M$ je, že je to nejmenší podprostor V, který obsahuje množinu M (pak dává smysl rovnost $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} \emptyset = \{\boldsymbol{o}\}$).

  A opravdu, je to podprostor který obsahuje M. A menší být nemůže, protože podprostor obsahuje každou lineární kombinaci svých prvků.

- Příklady:

  1. $\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[0,0,1],[1,0,0]\}$ v $\mathbf{R}^3$ je podprostor

     $$\{[a,0,b] \colon a, b \in \mathbf{R}\} = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon y = 0\}.$$

     Důvod je ten, že

     $$a \cdot [1,0,0] + b \cdot [0,0,1] = [a,0,b].$$

Tedy: Prvky $\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[0,0,1],[1,0,0]\}$ jsou podle definice právě prvky, která lze vyjádřit ve tvaru na levé straně. Proto je lze vyjádřit ve tvaru na pravé straně, a tedy patří do výše uvedeného podprostoru.

Obráceně: Prvky výše uvedeného podprostoru mají tvar na pravé straně. Lze je tedy vyjádřit ve tvaru na levé straně, a proto patří do $\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[0,0,1],[1,0,0]\}$.

2. $\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]\} = \mathbf{R}^3$:
   Každý prvek $[x,y,z] \in \mathbf{R}^3$ lze zapsat ve tvaru
   $$[x,y,z] = x \cdot [1,0,0] + y \cdot [0,1,0] + z \cdot [0,0,1],$$
   a tedy patří do $\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]\}$.
3. Uvažme prostor $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ všech reálných spojitých funkcí na $\mathbf{R}$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Pak $f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ a
   $$\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$$
   je podprostor tvořený všemi polynomy stupně nejvýše n.

K lineární závislosti, lineární nezávislosti a bázi:

- Lineární závislost a nezávislost vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ se definuje zcela analogicky jako v oddílu VI.2. (Vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou prvky nějakého vektorového prostoru, ne nutně $\mathbf{R}^n$, ale jinak je to zcela analogické.)

- Co je zde ovšem nové, je pojem lineárně nezávislé množiny (která může být nekonečná).

  Množina M je lineárně nezávislá, pokud pro každou volbu $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in M$, kde se žádný z vektorů neopakuje, je m-tice $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ lineárně nezávislá.

  Jinými slovy: Pokud $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in M$ jsou různé prvky a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{K}$ jsou taková čísla, že
  $$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{o},$$
  pak musí platit $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

  Pokud je množina M konečná, lze napsat jako $M = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$, kde se žádný prvek neopakuje. V tom případě je množina M lineárně nezávislá, právě když je m-tice $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ lineárně nezávislá.

- Příklady:

  1. Uvažme prostor $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ všech reálných spojitých funkcí na $\mathbf{R}$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Pak $f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$.

     – Trojice f_0, f_1, f_2 je lineárně nezávislá:
     Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ jsou taková, že $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \boldsymbol{o}$.
     Protože $\boldsymbol{o}$ je konstatní nulová funkce, znamená tato rovnost, že platí

     $$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0 \text{ pro každé } x \in \mathbf{R}.$$

     Z toho nyní odvodíme, že $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ukážeme si dva postupy:
     Postup první: Dosadíme několik hodnot x:
     Dosazením $x = 0$ dostaneme $\alpha_0 = 0$.
     Dosazením $x = 1$ pak dostaneme $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ (už víme, že $\alpha_0 = 0$). Dosazením $x = -1$ dostaneme $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Z těchto dvou rovností vidíme, že nutně $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
     Postup druhý: Funkce $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ je polynom nejvýše druhého stupně. Pokud by byl aspoň jeden z koeficientů nenulový, pak by tento polynom měl nejvýše dva reálné kořeny. Ale podle předpokladu je to konstantní nulová funkce, takže má nekonečně mnoho kořenů. Proto musí být $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

     – Pro každé $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ je $(n+1)$-tice $f_0, f_1, \dots, f_n$ lineárně nezávislá.
     Nechť $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ jsou taková, že $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = \boldsymbol{o}$.
     Protože $\boldsymbol{o}$ je konstatní nulová funkce, znamená tato rovnost, že platí

     $$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \text{ pro každé } x \in \mathbf{R}.$$

     Funkce $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ je polynom stupně nejvýše n. Pokud by byl aspoň jeden z koeficientů nenulový, pak by tento polynom měl nejvýše n reálných kořenů. Ale podle předpokladu je to konstantní nulová funkce, takže má nekonečně mnoho kořenů. Proto musí být $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

– Množina $M = \{f_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ je lineárně nezávislá.
To plyne z předchozího bodu: Mějme $f_{n_1}, \dots, f_{n_m} \in M$ různé prvky. Nechť $k = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Podle předchozího bodu jsou $f_0, \dots, f_k$ lineárně nezávislé. Tedy i $f_{n_1}, \dots, f_{n_m}$ jsou lineárně nezávislé.

2. Uvažme prostor $\mathfrak{s}$ všech posloupností reálných čísel. Pro $n \in \mathbf{N}$ nechť $\boldsymbol{e}_n$ je posloupnost, jejíž n-tý člen je roven 1 a všechny ostatní členy jsou nulové.
Tj.,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1} &= 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, \\ \boldsymbol{e_2} &= 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, \\ \boldsymbol{e_3} &= 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak množina $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je lineárně nezávislá.
Nechť totiž $n_1, \dots, n_m$ jsou různá přirozená čísla a $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou reálná čísla, pro která platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_{n_1} + \alpha_2 \boldsymbol{e}_{n_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{e}_{n_m} = \boldsymbol{o}.$$

Připomeňme, že $\boldsymbol{o}$ je konstatní nulová posloupnost. Přitom posloupnost na levé straně má na n_1-tém místě číslo α_1, na n_2-tém místě číslo α_2, a tak dále, až na n_m-tém místě má číslo α_m. Na ostatních místech má nulu.
Aby se rovnala konstantní nulové posloupnosti, musí být $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

- Báze vektorového prostoru V (nad $\mathbf{K}$) je taková množina $B \subset V$, která je jednak lineárně nezávislá a jednak platí $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} B = V$.

  Lze to popsat ještě jinak: B je báze prostoru V, právě když každý prvek prostoru V lze vyjádřit jako lineární kombinaci nějakých prvků množiny B, a to právě jedním způsobem.

  Dokažme si to:

  $\Rightarrow$: Nechť B je báze. Podle definice víme, že každý prvek V lze vyjádřit jako lineární kombinace prvků B. Zbývá ukázat, že to nejde dvěma různými způsoby.

Mějme tedy $\boldsymbol{v} \in V$ a předpokládejme, že ho máme vyjádřený jako lineární kombinaci prvků B dvěma způsoby:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n, \\ \boldsymbol{v} &= \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m.\end{aligned}$$

Nyní si rozmysleme, co znamená, že tato dvě vyjádření jsou stejná: Znamená to, že nenulové koeficienty jsou u týchž vektorů, a navíc jsou tyto koeficienty u daného vektoru stejné.

Předem nevíme, zda je mezi seznamy $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_2$ nějaký vztah. Takže vyčleníme ty vektory, které se v obou seznamech opakují. Dejme tomu, že prvních k se v obou seznamech shoduje a více již ne. (Přesněji – dejme tomu, že k vektorů je společných pro oba seznamy, pak si vektory můžeme přeuspořádat, aby to bylo prvních k.) Tedy máme:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n, \\ \boldsymbol{v} &= \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{v}_k + \beta_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m.\end{aligned}$$

Odečtením dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{o} = (\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\boldsymbol{v}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n \\ - \beta_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} - \ldots - \beta_m \boldsymbol{w}_m.\end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že vektory

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_m$$

patří do B a jsou různé (to jsme zařídili výše vyčleněním těch, co se opakovaly). Protože B je lineárně nezávislá, musí tato lineární kombinace být triviální, tedy

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k, \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = \beta_{k+1} = \cdots = \beta_m = 0.$$

No, a to přesně znamená, že ona dvě vyjádření, s nimiž jsme začali, se shodují.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že každý prvek V lze vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci nějakých prvků B. Ukážeme, že B je báze.

To znamená, že B splňuje dvě podmínky z definice báze. Platnost druhé podmínky (že každý prvek V lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků B) je zřejmá. Rozmysleme si, že B je lineárně nezávislá. Kdyby nebyla, pak najdeme netriviální lineární kombinaci (různých) prvků B, jejímž výsledkem je nulový vektor. Pak by ale nulový vektor bylo možné vyjádřit dvěma různými způsoby – tím právě zmíněným a pak jako triviální lineární kombinaci. To je ovšem spor s předpokladem.

- Uvedená charakteristika – báze jako taková množina, že každý vektor lze jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci, ukazuje hlavní motivaci pro zabývání se bázemi.

  Umožňuje nám totiž prvky prostoru popsat pomocí „souřadnic“ vůči bázi.

- Příklady:

  1. $\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$ je báze prostoru $\mathbf{R}^3$.
     Každý prvek $[x,y,z] \in \mathbf{R}^3$ lze totiž vyjádřit jako

     $$[x,y,z] = x \cdot [1,0,0] + y \cdot [0,1,0] + z \cdot [0,0,1]$$

     a toto vyjádření je zřejmě jednoznačné.
  2. Uvažme prostor $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ všech reálných spojitých funkcí na $\mathbf{R}$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Pak $f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$.

     Množina $\{f_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ je lineárně nezávislá, ale není to báze prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, protože všechny prvky $\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{f_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ jsou polynomy, ale ne každá spojitá funkce je polynom (například funkce e^x, $\sin x$, $|x|$ a řada dalších jsou spojité na $\mathbf{R}$, ale nejsou to polynomy).

     Nicméně množina $\{f_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ je báze prostoru všech polynomů.
  3. Uvažme prostor $\mathfrak{s}$ všech posloupností reálných čísel. Pro $n \in \mathbf{N}$ nechť $\boldsymbol{e}_n$ je posloupnost, jejíž n-tý člen je roven 1 a všechny ostatní členy jsou nulové (viz výše).

     Pak množina $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je lineárně nezávislá, ale není to báze prostoru $\mathfrak{s}$. Důvod je ten, že každá posloupnost z $\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbf{N}\}$

má jen konečně mnoho nenulových členů. Takže třeba konstantní posloupnost samých jedniček nelze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků této množiny.

Nicméně množina $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbf{N}\}$ je bází podprostoru

$$c_{00} = \{\{x_n\} \in \mathfrak{s} : \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : x_n = 0\}.$$

K Větám IX.3 a IX.4 a dimenzi prostoru:

- Bod (i) Věty IX.3 říká především, že každý vektorový prostor má bázi.

  Toto tvrzení se dokazuje z druhé části bodu (i) – z toho, že každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi. Pokud toto víme, stačí začít s prázdnou množinou (která je z triviálních důvodů lineárně nezávislá) a tu doplnit na bázi.

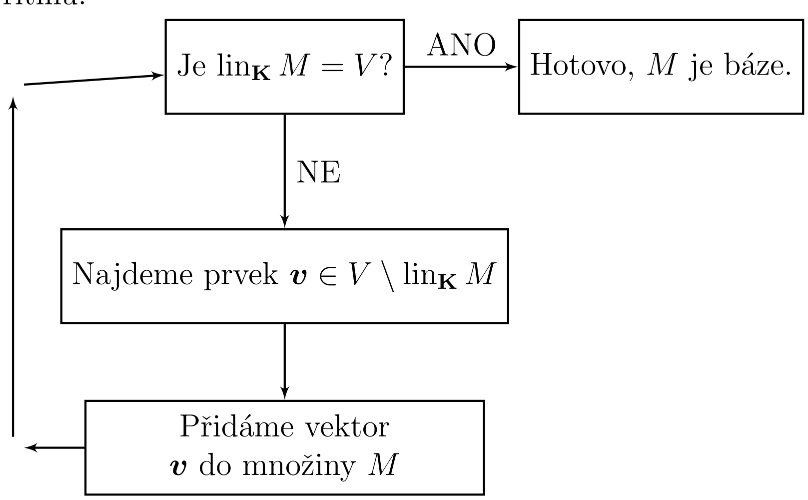
- Druhá část bodu (i) o doplnění lineárně nezávislé množiny na bázi vychází z pozorování, že báze je „maximální lineární nezávislá množina“. To jest, B je báze, právě když je lineárně nezávislá a už k ní nelze přidat žádný další vektor tak, aby zůstala lineárně nezávislá.

  Toto plyne z následujícího tvrzení:

  Nechť $B \subset V$ je lineárně nezávislá a $\boldsymbol{v} \in V$. Pak $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{lin}_{\mathbf{K}} B$, právě když $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ je lineárně nezávislá.

  Z toho vychází následující naivní postup hledání báze:

  Začneme s lineárně nezávislou množinou M a postupujme podle algoritmu:



Pokud po konečně mnoha krocích budeme hotovi, našli jsme bázi.

Pokud konečně mnoho kroků nestačí, pak si lze představit, že tento algoritmus aplikujeme nekonečně krát a stále dál. Ze základních principů teorie množin pak plyne, že nakonec dojdeme k cíli. (Detaily vysvětlovat nebudeme, není to snadné).

- Tak třeba výše uvedenou množinu $\{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbf{N}\}$ lze doplnit na bázi prostoru $\mathfrak{s}$ a množinu $\{f_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ lze doplnit na bázi prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. Ale tyto báze nemají žádný jednoduchý či konstruktivní popis – jejich existence plyne ze základních principů teorie množin.

- Bod (ii) Věty IX.3: Naznačíme důkaz pro případ, že báze je konečná:

  Ukážeme si pomocné tvrzení: *Nechť prvky $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ tvoří bázi prostoru V. Pak v prostoru V neexistuje $(n+1)$-tice lineárně nezávislých vektorů.*

  Pokud $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ tvoří bázi prostoru V, pak pro každé $\boldsymbol{v} \in V$ existují jednoznačně určené koeficienty $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{K}$, že

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{u}_1 + v_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{u}_n.$$

  Předpokládejme, že $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. Pro každé $j \in \{1, \dots, n+1\}$ uvažme vyjádření

$$\boldsymbol{v}^j = v_1^j\boldsymbol{u}_1 + v_2^j\boldsymbol{u}_2 + \cdots + v_n^j\boldsymbol{u}_n.$$

  Nyní je třeba si uvědomit, že vektory

$$[v_1^1, \dots, v_n^1], [v_1^2, \dots, v_n^2], \dots, [v_1^{n+1}, \dots, v_n^{n+1}]$$

  jsou lineárně nezávislé v $\mathbf{K}^n$. Neboli matice

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ v_1^2 & \dots & v_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{n+1} & \dots & v_n^{n+1} \end{pmatrix}$$

  má hodnost $n+1$. To ale není možné, protože má jen n sloupců (viz oddíl VI.2).

  To dokončuje důkaz pomocného tvrzení.

Z tohoto pomocného tvrzení již plyne bod (ii): Mějme tedy bázi B_1 o n prvcích a jinou bázi B_2. Podle pomocného tvrzení B_2 nemůže mít více než n prvků. Má tedy nejvýše n prvků, označme jejich počet m. Pak máme nějakou bázi o m prvcích, a tedy podle pomocného tvrzení jiná báze (například B_1) nemůže mít více než m prvků. Tedy $n \leq m$ i $m \leq n$, neboli $m = n$.

- Bod (ii) Věty IX.3 tedy říká, že počet prvků báze vektorového prostoru je jednoznačně určen. Tomuto počtu se říká dimenze prostoru a značí se $\dim V$.

  Extrémní případ je dimenze 0 – to nastává pro triviální vektorový prostor $\{\boldsymbol{o}\}$ – za jeho bázi považujeme prázdnou množinu.

  Prostor $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$ má dimenzi n.

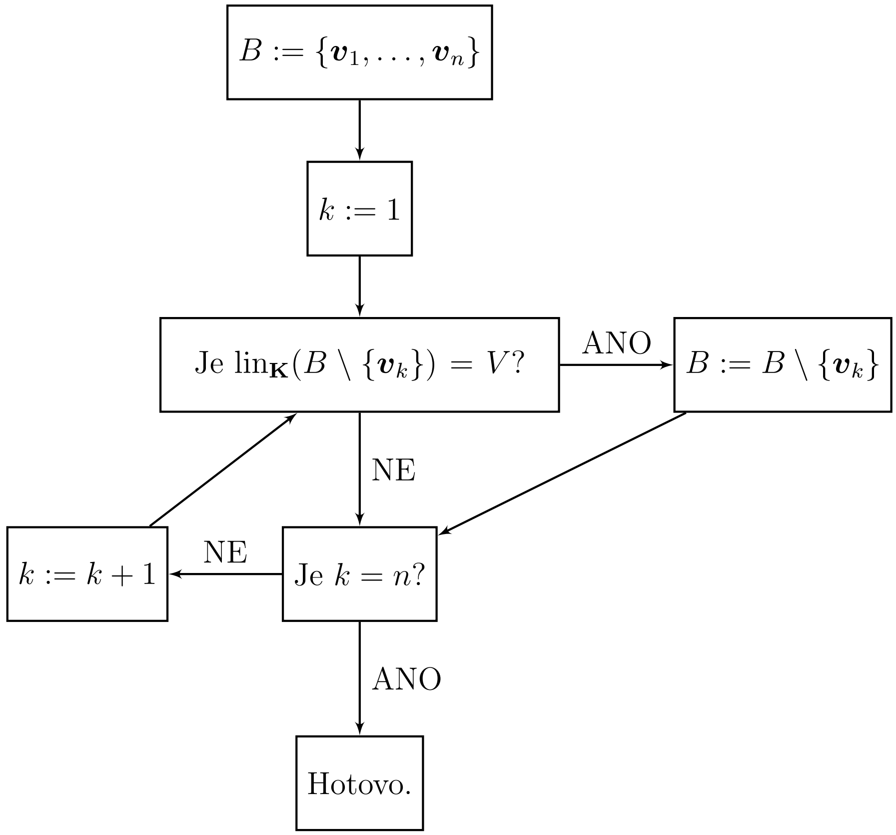
  Nekonečnou dimenzi má například prostor $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ nebo $\mathfrak{s}$.

- Větička IX.4 slouží ke zjednodušení důkazu, že dané prvky tvoří bázi. Podle definice víme, že je třeba ověřit dvě podmínky – lineární nezávislost a podmínku $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} B = V$. Tato větička říká, že pokud je vektorů správný počet (a ten je přirozené číslo), pak stačí ověřit jednu z podmínek. Toto oceníme zejména v Matematice IV.

  Důkaz:

  (i): Pokud $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ jsou lineárně nezávislé, pak množinu $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ lze podle Věty IX.3(i) doplnit na bázi. Protože $\dim V = n$, musí mít tato báze n prvků. Tedy již $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je báze.

  (ii): Předpokládejme, že $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = V$.
  Pak najdeme bázi prostoru V, která je obsažena v množině $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. Stačí totiž vzít minimální podmnožinu $B \subset \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, která splňuje $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}} B = V$. Tu najdeme tak, že přebytečné vektory postupně vypustíme. Algoritmus je schematicky znázorněn na obrázku:



Výsledná B je pak lineárně nezávislá (žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních – jinak by takový vektor bylo možné vynechat), a tedy je to báze V.

Protože ovšem $\dim V = n$, musí mít B n prvků, a tedy $B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$.

- Pokud máme vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbf{K}^n$, už známe algoritmus pro nalezení báze podprostoru $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$: Napíšeme si vektory jako řádky do matice (typu $k \times n$). Tu převedeme elementárními řádkovými úpravami na schodovitou matici. Pak nenulové řádky této schodovité matice tvoří bázi.