Komentář k oddílu VIII.5 – zobecněný Riemannův integrál

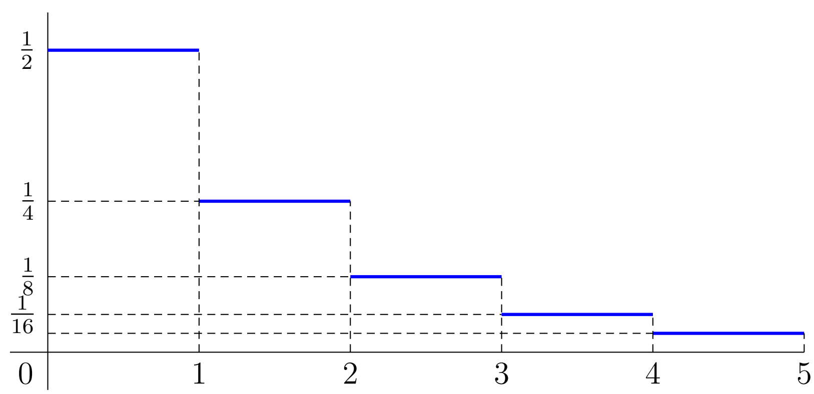
Celkové poznámky ke smyslu a účelu tohoto oddílu:

- Jak bylo vysvětleno již v oddílu VIII.1, určitý integrál má geometrický význam obsahu plochy pod grafem a používá se například ve fyzikálních či ekonomických modelech. Například k určení průměrné hodnoty nějaké veličiny za určený časový interval.
- Nevýhodou Riemannova integrálu jsou velmi restriktivní požadavky na jeho existenci – aby vůbec mělo smysl ho uvažovat, musíme mít omezenou funkci definovanou na uzavřeném intervalu.
- V aplikacích se ovšem přirozeně setkáváme s funkcemi definovanými na otevřeném intervalu, a to i neomezenými. I pro takové funkce může mít dobrý smysl obsah plochy pod grafem.
- Ilustrujme si to na příkladu (trochu umělém, ale názorném; přirozenější příklady budou později).

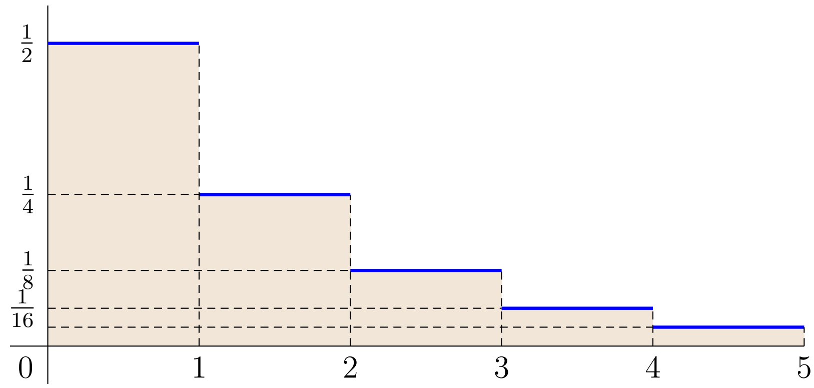
  Uvažme funkci $f : \langle 0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definovanou vzorcem

  $$f(x) = \frac{1}{2^n}, \quad x \in \langle n-1, n), n \in \mathbf{N}.$$

  Graf (samozřejmě jen jeho část) je načrtnut na obrázku:

  Plocha pod grafem je tvořena nekonečně mnoha obdélníky, z nichž některé jsou vyznačeny na následujícím obrázku.



Těchto obdélníku je nekonečně mnoho, vodorovná strana každého z nich má délku 1, svislá strana n-tého obdélníku má délku $\frac{1}{2^n}$.

Proto obsah plochy pod grafem je přirozené interpretovat jako součet obsahů všech zmíněných obdélníků, tedy jako součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

- Uvedený příklad ilustruje, že i plocha pod grafem funkce definované na neomezeném intervalu může být dobře definované konečné číslo.

  Příklad je vytvořen pomocí konvergentní řady. A podobně, jako je součet nekonečné řady definován jako limita posloupnosti částečných součtů, i integrál přes otevřený (třeba neomezený) interval budeme definovat pomocí limity jistých „částečných integrálů“.

K definici zobecněného Riemannova integrálu a souvisejícím lemmatům

- Význam Lemmatu VIII.22: Toto lemma se týká pouze Riemannova integrálu.

  Jeho hlavním smyslem je ukázat, že zobecněný Riemannův integrál opravdu zobecňuje Riemannův integrál.

- Důkaz Lemmatu VIII.22:

  Předpokládáme, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$.

Ze samotné definice Riemannova integrálu plyne, že f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tedy existuje číslo $M > 0$, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \leq M$.

Dále použijeme Větu VIII.3. Podle jejího bodu (i) má f Riemannův integrál přes každý uzavřený podinterval.

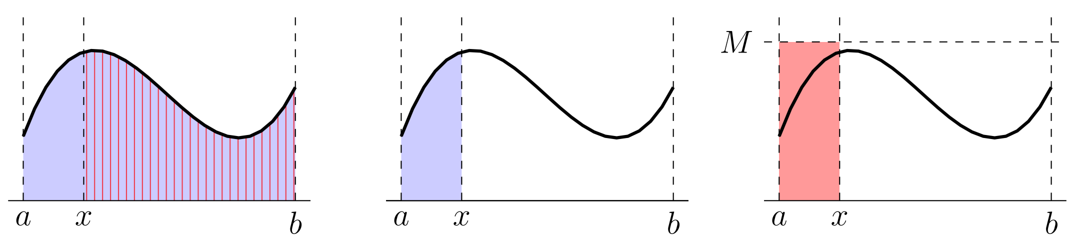
Navíc můžeme počítat (uvádíme body Věty VIII.3, z nichž jednotlivé kroky plynou):

$$\left|\int_a^b f - \int_x^b f\right| \overset{(i),(ii)}{=} \left|\int_a^x f\right| \overset{(v)}{\leq} \int_a^x |f| \overset{(iv)}{\leq} \int_a^x M = M(x-a) \overset{x\to a+}{\longrightarrow} 0,$$

což znamená, že $\lim_{x\to a+} \int_x^b f = \int_a^b f$, což je první ze slibovaných rovností.

Druhá se dokáže analogicky.

Výpočet a odhady jsou ilustrovány na následujícím obrázku – odhadujeme $\int_a^b f - \int_x^b f = \int_a^x f$.



- Význam Lemmatu VIII.23: Toto lemma především říká, že dále uvedená definice zobecněného Riemannova integrálu má dobrý smysl.

- Důkaz Lemmatu VIII.23:

Krok 1: Pokud pro nějaké $c \in (a, b)$ je výraz $\lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f$ definován, pak f má Riemannův integrál přes každý interval $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$.

To, že onen výraz je definován, znamená, že obě limity existují a jejich součet má smysl. V tomto kroku použijeme jen to, že obě limity existují.

Víme, že existuje limita $\lim_{x\to a+} \int_x^c f$. To speciálně znamená, že existuje takové $\delta \in (a, c)$, že pro $x \in (a, \delta)$ je $\int_x^c f$ definováno, tj. f má Riemannův integrál přes interval $\langle x, c\rangle$.

Podle Věty VIII.3(i) víme, že z existence Riemannova integrálu přes nějaký interval plyne existence Riemannova integrálu přes každý podinterval. Proto z předchozího odstavce plyne, že f má Riemannův integrál přes interval $\langle \alpha, c\rangle$ pro každé $\alpha \in (a, c)$.

Zcela stejně z toho, že existuje limita $\lim_{x\to b-} \int_c^x f$, odvodíme, že f má Riemannův integrál přes interval $\langle c, \beta\rangle$ pro každé $\beta \in (c, b)$.

Zkombinujeme-li závěry předchozích dvou odstavců s Větou VIII.3(ii), vidíme, že f má Riemannův integrál přes interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ pro každé $\alpha \in (a, c)$ a $\beta \in (c, b)$.

Protože každý uzavřený podinterval intervalu (a, b) je obsažen v některém z intervalů popsaných v přechozím odstavci, má f Riemannův integrál přes každý uzavřený podinterval (a, b), což dokončuje důkaz prvního kroku.

Krok 2: Nechť $c, d \in (a, b)$. Pak platí rovnost

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f = \lim_{x\to a+} \int_x^d f + \lim_{x\to b-} \int_d^x f,$$

pokud je alespoň jedna ze stran rovnosti definována.

Pokud je aspoň jedna strana definována, pak podle Kroku 1 má f Riemannův integrál přes každý uzavřený podinterval (a, b). Proto všechny Riemannovy integrály, se kterými budeme ve zbytku důkazu pracovat, jsou definovány.

Předpokládejme, že $c < d$.

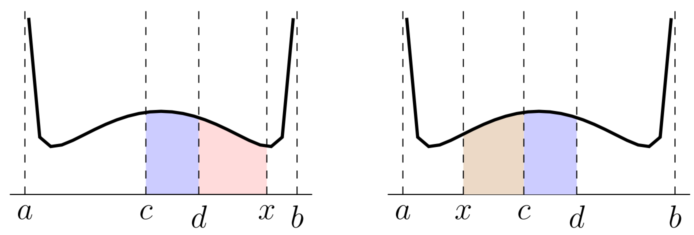
Pak pro $x > d$ podle Věty VIII.3(ii) platí (viz první obrázek níže):

$$\int_c^x f = \int_c^d f + \int_d^x f,$$

tedy

$$\lim_{x\to b-} \int_c^x f = \lim_{x\to b-} \left(\int_c^d f + \int_d^x f \right) = \int_c^d f + \lim_{x\to b-} \int_d^x f \qquad (*)$$

podle věty o aritmetice limit. Rovnost platí, pokud aspoň jedna z limit existuje (věta o aritmetice limit lze použít oběma směry).



$x > d$ $\qquad$ $x < c$

Podobně pro $x < c$ podle Věty VIII.3(ii) platí (viz druhý obrázek výše):

$$\int_x^d f = \int_x^c f + \int_c^d f, \text{ tedy } \int_x^c f = \int_x^d f - \int_c^d f,$$

tedy

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f = \lim_{x\to a+} \left(\int_x^d f - \int_c^d f \right) = - \int_c^d f + \lim_{x\to a+} \int_x^d f \quad (**)$$

podle věty o aritmetice limit. Rovnost platí, pokud aspoň jedna z limit existuje (věta o aritmetice limit lze použít oběma směry).

Pokud sečteme rovnosti $(*)$ a $(**)$, dostaneme přesně tu rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

- Definice zobecněného Riemannova integrálu: Zobecněný Riemannův integrál funkce f přes interval (a, b) definujeme vzorcem z Lemmatu VIII.23, pokud je onen výraz definován.

  Zobecněný Riemannův integrál nezávisi na volbě bodu c – to je přesně obsah Lemmatu VIII.23.

- Zobecněný Riemannův integrál skutečně zobecňuje Riemannův integrál. Svědčí o tom Lemma VIII.22. Předpokládejme totiž, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$. Zvolme $c \in (a, b)$. Pak platí:

$$\begin{aligned}(R)\int_a^b f &\overset{\text{VIII.3(ii)}}{=} (R)\int_a^c f + (R)\int_c^b f \\ &\overset{\text{VIII.22}}{=} \lim_{x\to a^+} (R)\int_x^c f + \lim_{x\to b-} (R)\int_c^x f = (ZR)\int_a^b f,\end{aligned}$$

  kde symboly (R) a (ZR) zdůrazňujeme Riemannův a zobecněný Riemannův integrál.

- Zobecněný Riemannův integrál existuje, pokud existují příslušné limity a jejich součet je definován.

  Přičemž součet není definován, když jedna z limit je $-\infty$ a druhá $+\infty$, v ostatních případech definován je.

  Zobecněný Riemannův integrál může být roven i $+\infty$ nebo $-\infty$.

  Příklady uvidíme brzy.

K Větě VIII.25:

- Tato věta dává metodu výpočtu zobecněného Riemannova integrálu pro spojité funkce.

  Zároveň nám dává postup, jak zjistit, zda zobecněný Riemannův integrál existuje.

- Důkaz věty:

  Věta plyne z definice zobecněného Riemannova integrálu a Věty VIII.9:

  Plyne to z následujícího výpočtu. Zvolme $c \in (a, b)$. Pak

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f \\
&\overset{VIII.9}{=} \lim_{x\to a+} (F(c) - F(x)) + \lim_{x\to b-} (F(x) - F(c)) \\
&\overset{AL}{=} F(c) - \lim_{x\to a+} F(x) + \lim_{x\to b-} F(x) - F(c) \\
&= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).
\end{aligned}$$

  Přičemž rovnosti platí, pokud je aspoň jedna strana definována.

  Podrobněji:

  Předpokládejme, že existuje zobecněný Riemannův integrál. První rovnost je jeho definice – limity existují a jejich součet má smysl.

  Podle Věty VIII.9 lze Riemannovy integrály vyjádřit jako přírůstky primitivní funkce, tedy opět příslušné limity existují a jejich součet je definován.

  Protože $F(c)$ je konstanta, lze výraz ekvivalentně upravit podle věty o aritmetice limit, čímž dostaneme příslušný rozdíl limit.

Obráceně: Je-li definován rozdíl limit na pravé straně, můžeme úpravy dělat zpětně, opět použít větu o aritmetice limit a Větu VIII.9, až dostaneme definující výraz pro zobecněný Riemannův integrál.

- Několik příkladů ilustrujících použití Věty VIII.25:

1. $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \text{pokud } \alpha > -1, \\ +\infty & \text{pokud } \alpha \le -1. \end{cases}$

   Pro $\alpha = -1$ je výpočet následující:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_0^1 = \lim_{x\to 1-} \log x - \lim_{x\to 0+} \log x = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

   Použili jsme skutečnost, že primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na intervalu $(0,1)$ je funkce $\log x$, Větu VIII.25 a znalosti o průběhu funkce logaritmus.

   Pro $\alpha \neq -1$ výpočet vypadá takto:

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \underbrace{\lim_{x\to 1-} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}_{=\frac{1}{\alpha+1}} - \lim_{x\to 0+} \frac{\boxed{x^{\alpha+1}}}{\alpha+1} \qquad \boxed{x^{\alpha+1}} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & \text{pro } \alpha+1>0 \\ +\infty & \text{pro } \alpha+1<0 \end{matrix}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} - 0 = \frac{1}{\alpha+1} & \text{pro } \alpha > -1, \\ \frac{1}{\alpha+1} - (-\infty) = +\infty & \text{pro } \alpha < -1. \end{cases}$$

   Opět jsme použili znalost primitivní funkce, Větu VIII.25, průběh funkce $x^{\alpha+1}$ a větu o aritmetice limit.

   Poznamenejme, že pro $\alpha < 0$ je funkce x^α neomezená na $(0,1)$ (má v nule zprava limitu $+\infty$), a tedy pro $\alpha \in (-1,0)$ máme neomezenou funkci, jejíž integrál je konečný.

2. $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \text{pokud } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{pokud } \alpha \ge -1. \end{cases}$

   Pro $\alpha = -1$ je výpočet následující:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \log x - \lim_{x\to 1+} \log x = +\infty - 0 = +\infty.$$

Použili jsme skutečnost, že primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na intervalu $(1, +\infty)$ je funkce $\log x$, Větu VIII.25 a znalosti o průběhu funkce logaritmus.

Pro $\alpha \neq -1$ výpočet vypadá takto:

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\boxed{x^{\alpha+1}}}{\alpha+1}^{\longrightarrow \begin{smallmatrix} 0 & \text{pro } \alpha+1<0 \\ +\infty & \text{pro } \alpha+1>0 \end{smallmatrix}} - \underbrace{\lim_{x\to1+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}_{=\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1} & \text{pro } \alpha < -1, \\ +\infty - \frac{1}{\alpha+1} = +\infty & \text{pro } \alpha > -1. \end{cases}$$

Opět jsme použili znalost primitivní funkce, Větu VIII.25, průběh funkce $x^{\alpha+1}$ a větu o aritmetice limit.

Poznamenejme, že pro $\alpha < -1$ je $\alpha + 1 < 0$, a tedy $-\frac{1}{\alpha+1} > 0$.

3. $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ neexistuje.
   Důvod je ten, že primitivní funkce k funkci $\cos x$ je $\sin x$, a ta nemá limitu v $+\infty$.
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ neexistuje.
   Když se pokusíme o výpočet podle Věty VIII.25, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}}_{=+\infty} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2}}_{=+\infty}$$

a rozdíl na pravé straně není definován.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} = \pi$.
   Podle Věty VIII.25 počítejme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$$
$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

K Větě VIII.24:

- Tato věta shrnuje několik základních vlastností zobecněného Riemannova integrálu, které jsou vcelku intuitivní.

  Věta plyne z analogických vlastností Riemannova integrálu (shrnutých ve Větě VIII.3), definice zobecněného Riemannova integrálu a vět o limitách funkcí.

  Probereme postupně jednotlivé body. Budeme předpokládat, že f a g jsou dvě funkce, které mají zobecněný Riemannův integrál přes (a,b). Zároveň zvolme pevné $c \in (a,b)$.

- Bod (i) byl dokázán výše jako první krok důkazu Lemmatu VIII.23.

- Bod (ii): Případ $\alpha = 0$ je zřejmý (funkce $0 \cdot f$ je konstantní nulová funkce a ta má nulový integrál).

  Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pak máme

$$\int_a^b \alpha f = \lim_{x\to a+} \int_x^c \alpha f + \lim_{x\to b-} \int_c^x \alpha f \overset{VIII.3(ii)}{=} \lim_{x\to a+} \alpha \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \alpha \int_c^x f$$
$$\overset{AL}{=} \alpha \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \alpha \lim_{x\to b-} \int_c^x f = \alpha \int_a^b f.$$

  První rovnost vychází z definice zobecněného Riemannova integrálu (je-li výraz vpravo definován), druhá rovnost z vlastností Riemannova integrálu a ve třetí jsme použili větu o aritmetice limit (je-li výraz vpravo definován, což ovšem je, protože $\alpha \neq 0$ a f má zobecněný Riemannův integrál pře (a,b)).

- Bod (iii) se dokáže podobným výpočtem:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g) &= \lim_{x\to a+} \int_x^c (f+g) + \lim_{x\to b-} \int_c^x (f+g) \\
&\overset{VIII.3(ii)}{=} \lim_{x\to a+} \left(\int_x^c f + \int_x^c g \right) + \lim_{x\to b-} \left(\int_c^x f + \int_c^x g \right) \\
&\overset{AL}{=} \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to a+} \int_x^c g + \lim_{x\to b-} \int_c^x f + \lim_{x\to b-} \int_c^x g \\
&= \int_a^b f + \int_a^b g.
\end{aligned}$$

První rovnost vychází z definice zobecněného Riemannova integrálu (je-li výraz vpravo definován), druhá rovnost z vlastností Riemannova integrálu a ve třetí jsme použili větu o aritmetice limit (je-li výraz vpravo definován, což ovšem je, protože f a g mají zobecněný Riemannův integrál přes (a, b) a součet těchto integrálů je definován).

- Bod (iv) plyne z Věty VIII.3(iv) a věty o limitě a nerovnostech (Věta IV.5(ii)):

  Nechť $f \geq g$ na (a, b). Pak

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \underbrace{\int_x^c f}_{\geq \int_x^c g \text{ dle VIII.3(iv)}} + \lim_{x \to b-} \underbrace{\int_c^x f}_{\geq \int_c^x g \text{ dle VIII.3(iv)}}$$

$$\overset{IV.5(ii)}{\geq} \lim_{x \to a+} \int_x^c g + \lim_{x \to b-} \int_c^x g = \int_a^b g.$$

- Bod (v):

  Protože f má zobecněný Riemannův integrál přes (a, b), má Riemannův integrál přes každý uzavřený podinterval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$.

  Podle Věty VIII.3(v) má i funkce $|f|$ Riemannův integrál přes každý uzavřený podinterval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$.

  Speciálně, pro každé $x \in (c, b)$ existuje Riemannův integrál $\int_c^x |f|$. Navíc, funkce

$$x \mapsto \int_c^x |f|, \quad x \in (c, b)$$

  je neklesající. Pokud totiž $x_1 < x_2$, pak

$$\int_c^{x_2} |f| = \int_c^{x_1} |f| + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} |f|}_{\geq 0} \geq \int_c^{x_1} |f|,$$

  protože $|f| \geq 0$ (používáme vlastně bod (iv)).

  Podle věty o limitě monotónní funkce existuje tedy

$$\lim_{x \to b-} \int_c^x |f| \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Podobně pro každé $x \in (a,c)$ existuje Riemannův integrál $\int_x^c |f|$ a funkce
$$x \mapsto \int_x^c |f|, \quad x \in (a,c)$$
je nerostoucí. Podle věty o limitě monotónní funkce existuje tedy
$$\lim_{x\to a+} \int_x^c |f| \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Tedy
$$\int_a^b |f| = \lim_{x\to a+} \int_x^c |f| + \lim_{x\to b-} \int_c^x |f|$$
existuje, protože obě limity existují a jejich součet je definován (žádná z nich nemůže být $-\infty$).

Proto má $|f|$ zobecněný Riemannův integrál přes (a,b).

Nerovnost pak plyne z nerovností $-|f| \le f \le |f|$ s použitím bodů (iv) a (ii), stejně jako tomu bylo ve Větě VIII.3.

- Poznámka: $\int_a^b |f|$ může být $+\infty$ i v případě, že $\int_a^b f$ je konečný. Příklad není úplně jednoduchý.

K Větě VIII.26:

- Tato věta je verzí Věty VIII.16 pro zobecněný Riemannův integrál. Z Věty VIII.16 ji lze též dokázat.

  Přínosem této věty je (mimo jiné) zjednodušení výpočtu určitého integrálu při vícenásobném použití metody per partes, jak si ukážeme na příkladech níže.

- Důkaz:

  Z předpokladů plyne, že funkce fg' je spojitá na intervalu (a,b), má tedy na tomto intervalu primitivní funkci (Věta VIII.8).

  Nechť h je nějaká primitivní funkce k fg' na intervalu (a,b). Pak podle Věty VIII.16 je funkce
$$fg - h$$
  primitivní funkcí k funkci $f'g$ na (a,b).

Podle Věty VIII.25 pak platí

$$\int_a^b f'g = [fg - h]_a^b,$$

pokud je zobecněný přírůstek na pravé straně definován.

Upravme si tento zobecněný přírůstek:

$$\begin{aligned}[fg-h]_a^b &= \lim_{x\to b-}(f(x)g(x)-h(x)) - \lim_{x\to a+}(f(x)g(x)-h(x)) \\ &\overset{AL}{=} \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \lim_{x\to b-} h(x) - \lim_{x\to a+} f(x)g(x) + \lim_{x\to a+} h(x) \\ &= [fg]_a^b - [h]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.\end{aligned}$$

První rovnost je definice zobecněného přírůstku (a platí za předpokladu, že limity vpravo existují a jejich rozdíl je definován.

Druhá rovnost je důsledkem věty o aritmetice limit a platí za předpokladu, že výraz na pravé straně je definován.

Třetí rovnost je pouze přepisem výrazu pomocí zobecněných přírůstků.

Poslední rovnost je důsledkem Věty VIII.25 a platí za předpokladu, že pravá strana je definována.

Pravá strana ovšem definována je podle předpokladů věty. Proto všechny uvedené rovnosti opravdu platí a důkaz je hotov.

- Příklady užití:

  1.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx &\underset{\substack{f'(x)=\sin x \quad g(x)=x^2 \\ f(x)=-\cos x \quad g'(x)=2x}}{=} [-x^2\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-2x\cos x)\, dx \\ &= -\pi^2\cos\pi - 0 + \int_0^\pi 2x\cos x\, dx \\ &\underset{\substack{f'(x)=\cos x \quad g(x)=2x \\ f(x)=\sin x \quad g'(x)=2}}{=} \pi^2 + \underbrace{[2x\sin x]_0^\pi}_{=0-0=0} - \int_0^\pi 2\sin x\, dx \\ &= \pi^2 - [-2\cos x]_0^\pi = \pi^2 - (-2\cdot(-1) - (-2)\cdot 1) = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

2. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

   Dokážeme to matematickou indukcí.

   Pro $n = 0$ je zřejmě

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) - \lim_{x\to 0+}(-e^{-x}) = 0-(-1) = 1 = 0!.$$

   Pokud vzorec platí pro n, pak

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n+1}ne^{-x}\,dx \underset{\substack{f'(x)=e^{-x} \quad g(x)=x^{n+1}\\ f(x)=-e^{-x} \quad g'(x)=(n+1)x^n}}{=} & \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(n+1)x^n(-e^{-x})\,dx \\ = & \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^n}{e^x}}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^n}{e^x}}_{=0} + (n+1)\underbrace{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}}_{=n!\text{ dle ind. př.}} = (n+1)!\end{aligned}$$

- Poznámka: Všimněme si, jak použití metody per partes pro určitý integrál zjednoduší výpočet. Kdybychom v předchozích příkladech nejprve pomocí metody per partes (v prvním příkladě opakované dvakrát, ve druhém případě n-krát) spočítali primitivní funkci a teprve pak použili Větu VIII.25, došli bychom k témuž výsledku, ale delším a početně náročnějším postupem.

K Větě VIII.27:

- Tato věta je verzí Věty VIII.15 pro určitý integrál.

  Přínosem je mj. zjednodušení výpočtu určitých integrálů, jak ilustrujeme později.

- Ve větě se vyskytuje absolutní hodnota $|\varphi'|$. Z předpokladů plyne, že buď je na celém intervalu (α, β) je $\varphi' \geq 0$ nebo je na celém intervalu $\varphi' \leq 0$ – podle toho, zda je φ rostoucí nebo klesající. Lze to tedy chápat, jako dvě verze věty zapsané najednou.

- Věta je formulována za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje. To znamená, že ji lze použít oběma směry – integrál na pravé straně použít k výpočtu integrálu na levé straně nebo integrál na levé straně použít k výpočtu integrálu na pravé straně.

  Také se dá použít k důkazu, že daný integrál neexistuje.

- Důkaz věty pro případ, že φ je rostoucí:

  V tomto případě $\varphi' \geq 0$ na (a, b), tedy $|\varphi'| = \varphi'$.

  Z předpokladů víme, že funkce f je spojitá na (a, b). Podle Věty VIII.8 má primitivní funkci. Nechť F je nějaká primitivní funkce. Podle Věty VIII.25 platí

  $$\int_a^b f = [F]_a^b \,, \quad \text{pokud alespoň jeden z výrazů je definován.} \qquad (\circ)$$

  Z Věty o derivaci složené funkce plyne, že $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na (α, β). Z předpokladů věty dále plyne, že funkce $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ je spojitá na (α, β). Podle Věty VIII.25 tedy platí

  $$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = [F \circ \varphi]_\alpha^\beta \,, \quad \text{pokud alespoň jeden z výrazů je definován.} \qquad (\circ\circ)$$

  Tvrzení věty je v tomto případě tedy ekvivaletní platnosti rovnosti

  $$[F]_a^b = [F \circ \varphi]_\alpha^\beta, \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován.} \qquad (\circ\circ\circ)$$

  Zobecněné přírůstky jsou definovány jako rozdíl jistých limit. Ukážeme, že se v tomto případě odpovídají limity rovnají.

  Konkrétně platí:

  $$\lim_{x \to b-} F(x) = \lim_{t \to \beta-} F(\varphi(t)), \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován.} \qquad (\square)$$

  - Předpokládejme, že výraz na levé straně je definován, tj.

    $$\lim_{x \to b-} F(x) = C \in \mathbf{R}^*.$$

    Protože φ je rostoucí na intervalu (α, β) a zobrazuje tento interval na (a, b), platí

    $$\lim_{t \to \beta-} \varphi(t) = b$$

    a navíc pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí $\varphi(t) < b$.
    Nyní ovšem můžeme použít větu o limitě složené funkce (variantu pro jednostranné limity s podmínkou (P)), a dostaneme, že

    $$\lim_{t \to \beta-} F(\varphi(t)) = C.$$

– Nyní obráceně – předpokládejme, že výraz na pravé straně je definován, tj.

$$\lim_{t\to\beta-} F(\varphi(t)) = C \in \mathbf{R}^*.$$

Protože φ je rostoucí na intervalu (α, β) a zobrazuje tento interval na (a, b), existuje inverzní funkce φ^{-1}, která je rostoucí na (a, b) a zobrazuje tento interval na (α, β).

Platí tedy

$$\lim_{x\to b-} \varphi^{-1}(x) = \beta$$

a navíc pro každé $x \in (a, b)$ platí $\varphi^{-1}(x) < \beta$.

Použitím věty o limitě složené funkce (varianty pro jednostranné limity s podmínkou (P)) dostaneme

$$\lim_{x\to b-} \underbrace{F(\varphi(\varphi^{-1}(x)))}_{=F(x)} = C.$$

Tím jsme dokázali tvrzení (□). Zcela analogicky dokážeme

$$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{t\to\alpha+} F(\varphi(t)), \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován.} \tag{□□}$$

Nyní je zřejmé, že z tvrzení (□) a (□□) plyne tvrzení $(\circ\circ\circ)$, což dokončuje důkaz tohoto případu.

- Důkaz věty pro případ, že φ je klesající.

  V tomto případě $\varphi' \le 0$ na (a, b), tedy $|\varphi'| = -\varphi'$.

  Zcela stejně jako v předchozím případě dokážeme tvrzení $(\circ)$ a $(\circ\circ)$.

  Tvrzení věty je v tomto případě tedy ekvivaletní platnosti rovnosti

  $$[F]_a^b = -[F \circ \varphi]_\alpha^\beta, \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován.} \tag{$\diamond$}$$

  Protože φ je klesající, je $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = a$ a $\lim_{x\to a+} \varphi^{-1}(x) = \beta$.

  Proto opět s využitím věty o limitě složené funkce dostaneme

  $$\lim_{x\to b-} F(x) = \lim_{t\to\alpha+} F(\varphi(t)), \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován,}$$
  $$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{t\to\beta-} F(\varphi(t)), \quad \text{pokud aspoň jeden z výrazů je definován,}$$

  Z těchto dvou tvrzení plyne tvrzení $(\diamond)$ a důkaz je hotov.

- Příklad použití:

  Spočtěme $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

  Máme $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ a $(a,b)=(-1,1)$. Použijeme substituci s použitím funkce

  $$\varphi(t)=\sin t, \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

  Funkce φ je rostoucí na intervalu $(\alpha,\beta)=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval na interval $(-1,1)$. Navíc

  $$\varphi'(t)=\cos t>0 \text{ na } (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

  Protože φ' je také spojitá na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, můžeme použít Větu VIII.27:

  $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi-(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(-\pi))=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

  Při výpočtu jsme použili část výpočtu primitivní funkce k $\sqrt{1-x^2}$, který byl proveden v oddílu VIII.3.

  Všimněme si, že nebylo nutné vyjadřovat inverzní funkci k φ a počítat primitivní funkci k původní funkci. Proto byl výpočet jednodušší než kdybychom nejprve spočítali primitivní funkci (jako v oddílu VIII.3) a teprve pak použili Větu VIII.25