

XVII.3 Soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty – metody řešení

Uvažujme soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá vektorová funkce a \mathbf{x} je neznámá vektorová funkce. Takové soustavě říkáme **soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty**.

Definice. λ -maticí typu $m \times n$ rozumíme matici typu $m \times n$, jejímiž prvky jsou polynomy v proměnné λ .

Řádkovými úpravami λ -matice rozumíme

- (a) prohození dvou řádků,
- (b) vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- (c) přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Věta 9. Každou λ -matici typu $m \times n$ lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na schodovitou.

Metoda řešení homogenní soustavy $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$:

1. Napíšeme si λ -matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a tu řádkovými úpravami převedeme na schodovitou λ -matici. Výsledná matice bude horní trojúhelníková matice, bude mít tedy tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Navíc bude platit, že součet stupňů polynomů na diagonále (tj. polynomů P_{11}, \dots, P_{nn}) je roven n .

2. Vzniklou λ matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic. Nová soustava bude mít tvar

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dt}\right)x_1 + P_{12}\left(\frac{d}{dt}\right)x_2 + \dots + P_{1n}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= 0 \\ P_{22}\left(\frac{d}{dt}\right)x_2 + \dots + P_{2n}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= 0 \\ &\vdots \\ P_{nn}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= 0, \end{aligned}$$

kde symbolem $P\left(\frac{d}{dt}\right)x$ rozumíme funkci $a_k x^{(k)} + a_{k-1} x^{(k-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$, pokud $P(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$.

3. Nová soustava má stejnou množinu řešení jako výchozí soustava. Vyřešíme ji odzadu (tedy od n -té rovnice po první). Přitom používáme metodu řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty – hledání fundamentálního systému a řešení rovnic se speciální pravou stranou.

Metody hledání partikulárního řešení:

- Variace konstant - použijeme Větu 8.
- Je-li vektorová funkce \mathbf{b} dostatečně hladká (např. třídy C^∞), lze použít eliminaci pro nehomogenní rovnici: K λ -matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} | \mathbf{b}(t))$ typu $n \times (n + 1)$. Řádkovými úpravami dojdeme k matici tvaru

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(t, \lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(t, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(t, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Tuto matici přepíšeme opět jako soustavu diferenciálních rovnic. Levé strany budou mít stejný tvar jako v případě homogenní soustavy. Funkce $f_j(t, \lambda)$ v posledním sloupci upravené matice mají tvar

$$f_j(t, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i g_{ji}(t),$$

kde funkce g_{ji} jsou nějaké funkce třídy C^∞ . Nová soustava pak bude mít tvar

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dt}\right)x_1 + P_{12}\left(\frac{d}{dt}\right)x_2 + \dots + P_{1n}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= \tilde{f}_1(t) \\ P_{22}\left(\frac{d}{dt}\right)x_2 + \dots + P_{2n}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= \tilde{f}_2(t) \\ \vdots & \\ P_{nn}\left(\frac{d}{dt}\right)x_n &= \tilde{f}_n(t), \end{aligned}$$

kde $\tilde{f}_j(t) = \sum_{i=0}^k g_{ji}^{(i)}(t)$.

Nová soustava má stejnou množinu řešení jako výchozí soustava a opět ji řešíme odzadu.