XVII.4 Vlastnosti maximálních řešení

Uvažujme soustavu

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \tag{2}$$

kde máme $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$,
$\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)]$ a dále $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

Věta 10 (o opouštění kompaktu). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, $\boldsymbol{f}$ je spojitá na G, $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení rovnice (2) definované na intervalu (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \boldsymbol{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.*

Lemma 11 (Gronwallovo lemma). *Nechť funkce u je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle t_0, t_1)$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $t_1 \in \mathbf{R}^*$. Nechť existují čísla $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ taková, že*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta)\, \mathrm{d}s, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t - t_0)}, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Věta 12 (o rovnicích s lineárním růstem). *Nechť $G = (a, b) \times \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}$ je spojitá na G a existují funkce α, β spojité na (a, b) takové, že pro každé $[t, \boldsymbol{x}] \in G$ platí*

$$\|f(t, \boldsymbol{x})\| \leq \alpha(t)\|\boldsymbol{x}\| + \beta(t).$$

Pak každé maximální řešení rovnice (2) je definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 13 (o spojité závislosti na počátečních podmínkách). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínku (3) z Věty 3. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (2) definované na intervalu (α, β). Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každou trojici čísel $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$ splňující $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- *$\boldsymbol{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,*
- *$\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle :\ \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon$.*