XIV.2 Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní rovnicí rozumíme diferenciální rovnici tvaru

$$y' = g(y),$$

kde g je reálná funkce spojitá na svém definičním oboru.

Pozorování. Nechť funkce y je řešením autonomní rovnice na intervalu (a, b). Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ je funkce $\tilde{y}(x) = y(x+c)$ řešením téže rovnice na intervalu $(a - c, b - c)$.

Věta 1. *Každé řešení autonomní rovnice je monotónní.*

Poznámka. Autonomní rovnice jsou speciální případ rovnic se separovanými proměnnými. Dají se tedy řešit podle metody z předchozího oddílu, která je v tomto případě jednodušší.

Větička 2. *Uvažujme autonomní rovnici $y' = g(y)$. Nechť funkce g je kladná na intervalu (a, b), $c \in (a, b)$ je libovolný bod a y je řešení s hodnotami v (a, b) definované na maximálním možném intervalu (tj. jedno z řešení nalezených v pátém kroku).*

(a) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje (tj. $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje), je řešení y definováno na omezeném intervalu.*
(b) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje, je řešení y definováno na intervalu $(-\infty, T)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*
(c) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení y definováno na intervalu $(T, +\infty)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*
(d) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení definováno na celém $\mathbf{R}$.*

Poznámky.

(1) Integrálem v předchozím tvrzení rozumíme zobecněný Riemannův integrál.
(2) Pokud navíc $g(b) = 0$ a nastane případ (a) nebo (b), pak lze řešení y prodloužit „doprava“ konstantní funkcí rovnou b. Analogicky lze y prodloužit „doleva“ konstatní funkcí rovnou a, jestliže $g(a) = 0$ a nastane případ (a) nebo (c).
(3) Analogická tvrzení platí, pokud g je záporná na (a, b).

Věta 3. *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Nechť* g *je funkce spojitá a kladná na intervalu* $\langle a, b)$.

(1) *Pokud má funkce* g *v bodě* b *zleva nenulovou limitu, pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

(2) *Pokud existuje takové* $\alpha < 1$, *že existuje nenulová limita* $\lim\limits_{x \to b-} \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$, *pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

(3) *Pokud navíc* $g(b) = 0$ *a existuje vlastní derivace* $g'_-(b)$, *pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *diverguje.*

Věta 4. *Nechť* $a \in \mathbf{R}$ *a nechť* g *je funkce spojitá a kladná na intervalu* $\langle a, +\infty)$.

(1) *Pokud existuje takové* $\alpha > 1$, *že existuje nenulová limita* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}$, *pak* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ *konverguje.*

(2) *Pokud existuje vlastní limita* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x}$, *pak* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ *diverguje.*

Poznámka Analogie Vět 3 a 4 platá i pro intervaly $(b, a\rangle$ a $(-\infty, a\rangle$.

Důsledek. *Nechť* g *je reálná funkce, která má v každém bodě svého definičního oboru vlastní derivaci. Pak pro každé* $x_0 \in \mathbf{R}$ *a každé* $y_0 \in D_g$ *existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* $y' = g(y)$ *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$.