XVI.1 Lineární rovnice s konstantními koeficienty – – struktura prostoru řešení

- **Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

  kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b). Je-li funkce f nulová, mluvíme o **homogenní rovnici**.
- Zobrazení $L\colon y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$ je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^n(a, b)$ do prostoru $\mathcal{C}(a, b)$.

Věta 1 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $(*)$, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Větička 2.

(i) *Maximální řešení homogenní rovnice jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$.*

(ii) *Nechť y_p je jedno řešení rovnice $(*)$. Pak funkce y je jejím řešením, právě když lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení homogenní rovnice.*

Věta 3. *Dimenze vektorového prostoru všech maximálních řešení homogenní rovnice je rovna n (tedy řádu rovnice).*

Definice. Bázi prostoru maximálních řešení nazýváme **fundamentální systém řešení**.

XVI.2 Tvar fundamentálního systému, rovnice se speciální pravou stranou

Uvažujme rovnici

$$(**) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$.

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice $(**)$ nazýváme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (o tvaru fundamentálního systému). *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi $s_1, \dots, s_k$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_1 - \beta_1 i$, … , $\alpha_l + \beta_l i$, $\alpha_l - \beta_l i$ jsou všechny různé imaginární kořeny polynomu χ s násobnostmi $u_1, \dots, u_l$. Pak systém*

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{s_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_k t}, & te^{\lambda_k t}, & \dots & t^{s_k-1}e^{\lambda_k t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{u_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{u_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{u_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{u_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}
$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (**).

Věta 5 (o rovnicích se speciální pravou stranou). *Uvažujme rovnici*

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t)\cos\nu t + Q(t)\sin\nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ a *P, Q jsou polynomy. Potom platí:*

(i) *Jestliže číslo $\mu + i\nu$ není kořenem charakteristického polynomu, pak existuje řešení rovnice* (*) *tvaru*

$$y_0(t) = e^{\mu t} \cdot (R(t)\cos\nu t + S(t)\sin\nu t)\,,$$

kde R, S jsou polynomy, jejichž stupně jsou nejvýše rovny většímu ze stupňů polynomů P, Q.

(ii) *Jestliže číslo $\mu + i\nu$ je kořenem charakteristického polynomu a má násobnost m, pak existuje řešení rovnice* (*) *tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t)\cos\nu t + S(t)\sin\nu t)\,,$$

kde R, S jsou polynomy, jejichž stupně jsou nejvýše rovny většímu ze stupňů polynomů P, Q.