XVII.1 Soustavy diferenciálních rovnic – základy

- **Soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu** rozumíme soustavu tvaru

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\\
x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\\
&\ \vdots\\
x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),
\end{aligned}
$$

  kde $f_1, \dots, f_n$ jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.
- **Vektorovou funkcí** rozumíme zobrazení definované na podmnožině $\mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$). Je-li $\boldsymbol{x}$ vektorová funkce do $\mathbf{R}^n$, má n složek a lze psát $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou reálné funkce jedné proměnné.
- **Derivování a integrování vektorových funkcí.** Je-li $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$, potom

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'(t) &= [x_1'(t), \dots, x_n'(t)], \qquad t \in (\alpha, \beta);\\
\int_a^b \boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s &= \left[\int_a^b x_1(s)\,\mathrm{d}s, \dots, \int_a^b x_n(s)\,\mathrm{d}s\right], \qquad a, b \in (\alpha, \beta),
\end{aligned}
$$

  pokud derivace, resp. integrály, jednotlivých složek existují.
- Je-li vektorové zobrazení $\boldsymbol{f}$ definované na podmnožině $\mathbf{R}^m$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$, lze opět psát $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n]$, kde $f_1, \dots, f_n$ jsou funkce definované na podmnožině $\mathbf{R}^m$ – složky zobrazení $\boldsymbol{f}$. Nechť $G \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a $\boldsymbol{f}$ je zobrazení G do $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{f}$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G, jestliže $f_i \in \mathcal{C}^1(G)$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Značíme $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$.

- **Vektorový tvar soustavy** (1):

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{2}$$

kde máme $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$,
$\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.
- **Řešením** soustavy (2) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x}$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existuje vlastní derivace $\boldsymbol{x}'(t)$ a platí rovnost (2).
- **Maximální řešení** soustavy (2) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.
- **Počáteční úlohou** pro (2) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (2) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

Větička 1 (ekvivalence diferenciální a integrální rovnice). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\boldsymbol{f} : G \to \mathbf{R}^n$ spojité vektorové zobrazení (tj. $f_1, \dots, f_n$ jsou spojité funkce). Nechť $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$. Vektorová funkce $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ je řešením rovnice (2) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, právě když pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ splňuje vztah*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Věta 2 (Peanova o existenci řešení). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá (tj. $f_1, \dots, f_n$ jsou spojité funkce). Pak pro každý bod $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (2) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.*

Věta 3 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbf{R}^n$ splňuje podmínku:*

(3) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že f_i je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, …, $(n+1)$-té proměnné jsou spojité na G.*

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (2) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.