XVII.3 Soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty – metody řešení

Uvažujme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ je spojitá vektorová funkce a $\boldsymbol{x}$ je neznámá vektorová funkce. Takové soustavě říkáme **soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty**.

Definice. **λ-maticí typu** $m \times n$ rozumíme matici typu $m \times n$, jejímiž prvky jsou polynomy v proměnné λ.

Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme

(a) prohození dvou řádků,
(b) vynásobení řádku nenulovou konstantou,
(c) přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Věta 9. *Každou λ-matici typu $m \times n$ lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na schodovitou.*

Metoda řešení homogenní soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$:

1. Napíšeme si λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a tu řádkovými úpravami převedeme na schodovitou λ-matici. Výsledná matice bude horní trojúhelníková matice, bude mít tedy tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Navíc bude platit, že součet stupňů polynomů na diagonále (tj. polynomů $P_{11}, \dots, P_{nn}$) je roven n.

2. Vzniklou λ matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic. Nová soustava bude mít tvar

$$\begin{array}{rcccl} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n = 0 \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n = 0 \\ & & & \vdots & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n = 0, \end{array}$$

kde symbolem $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x$ rozumíme funkci $a_k x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x$, pokud $P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

3. Nová soustava má stejnou množinu řešení jako výchozí soustava. Vyřešíme ji odzadu (tedy od n-té rovnice po první). Přitom používáme metodu řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty – hledání fundamentálního systému a řešení rovnic se speciální pravou stranou.

Metody hledání partikulárního řešení:

- Variace konstant - použijeme Větu 8.
- Je-li vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ dostatečně hladká (např. třídy C^∞), lze použít eliminaci pro nehomogenní rovnici: K λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}|\boldsymbol{b}(t))$ typu $n \times (n+1)$. Řádkovými úpravami dojdeme k matici tvaru
$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(t,\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(t,\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(t,\lambda) \end{pmatrix}.$$
Tuto matici přepíšeme opět jako soustavu diferenciálních rovnic. Levé strany budou mít stejný tvar jako v případě homogenní soustavy. Funkce $f_j(t,\lambda)$ v posledním sloupci upravené matice mají tvar
$$f_j(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i g_{ji}(t),$$
kde funkce g_{ji} jsou nějaké funkce třídy C^∞. Nová soustava pak bude mít tvar
$$\begin{array}{llllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y})x_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \tilde{f}_1(t) \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \tilde{f}_2(t) \\ & & & \vdots & & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \tilde{f}_n(t), \end{array}$$
kde $\tilde{f}_j(t) = \sum_{i=0}^{k} g_{ji}^{(i)}(t)$.

Nová soustava má stejnou množinu řešení jako výchozí soustava a opět ji řešíme odzadu.