# XIV.2 Autonomní diferenciální rovnice

**Autonomní rovnicí** rozumíme diferenciální rovnici tvaru

$$y' = g(y),$$

kde $g$ je reálná funkce spojitá na svém definičním oboru.

**Pozorování.** Nechť funkce $y$ je řešením autonomní rovnice na intervalu $(a, b)$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ je funkce $\tilde{y}(x) = y(x+c)$ řešením téže rovnice na intervalu $(a - c, b - c)$.

**Věta 1.** *Každé řešení autonomní rovnice je monotónní.*

**Poznámka.** Autonomní rovnice jsou speciální případ rovnic se separovanými proměnnými. Dají se tedy řešit podle metody z předchozího oddílu, která je v tomto případě jednodušší.

**Větička 2.** *Uvažujme autonomní rovnici $y' = g(y)$. Nechť funkce $g$ je kladná na intervalu $(a, b)$, $c \in (a, b)$ je libovolný bod a $y$ je řešení s hodnotami v $(a, b)$ definované na maximálním možném intervalu (tj. jedno z řešení nalezených v pátém kroku).*

(a) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje (tj. $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje), je řešení $y$ definováno na omezeném intervalu.*

(b) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje, je řešení $y$ definováno na intervalu $(-\infty, T)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*

(c) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení $y$ definováno na intervalu $(T, +\infty)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*

(d) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení definováno na celém $\mathbf{R}$.*

**Poznámky.**

(1) Integrálem v předchozím tvrzení rozumíme zobecněný Riemannův integrál.

(2) Pokud navíc $g(b) = 0$ a nastane případ (a) nebo (b), pak lze řešení $y$ prodloužit „doprava“ konstantní funkcí rovnou $b$. Analogicky lze $y$ prodloužit „doleva“ konstatní funkcí rovnou $a$, jestliže $g(a) = 0$ a nastane případ (a) nebo (c).

(3) Analogická tvrzení platí, pokud $g$ je záporná na $(a, b)$.

**Věta 3.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Nechť $g$ je funkce spojitá a kladná na intervalu $\langle a, b)$.*

(1) *Pokud má funkce $g$ v bodě $b$ zleva nenulovou limitu, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.*

(2) *Pokud existuje takové $\alpha < 1$, že existuje nenulová limita $\lim\limits_{x \to b-} \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.*

(3) *Pokud navíc $g(b) = 0$ a existuje vlastní derivace $g'_-(b)$, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.*

**Věta 4.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ a nechť $g$ je funkce spojitá a kladná na intervalu $\langle a, +\infty)$.*

(1) *Pokud existuje takové $\alpha > 1$, že existuje nenulová limita $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}$, pak $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ konverguje.*

(2) *Pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x}$, pak $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ diverguje.*

**Poznámka** Analogie Vět 3 a 4 platá i pro intervaly $(b, a\rangle$ a $(-\infty, a\rangle$.

**Důsledek.** *Nechť $g$ je reálná funkce, která má v každém bodě svého definičního oboru vlastní derivaci. Pak pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ a každé $y_0 \in D_g$ existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice $y' = g(y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$.*