XVI.2 Tvar fundamentálního systému, rovnice se speciální pravou stranou

Uvažujme rovnici

$$(**)\qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$.

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (**) nazýváme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (o tvaru fundamentálního systému). *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi $s_1, \ldots, s_k$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_1 - \beta_1 i$, … , $\alpha_l + \beta_l i$, $\alpha_l - \beta_l i$ jsou všechny různé imaginární kořeny polynomu χ s násobnostmi $u_1, \ldots, u_l$. Pak systém*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & t^{s_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_k t}, & te^{\lambda_k t}, & \ldots & t^{s_k-1}e^{\lambda_k t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \ldots & t^{u_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \ldots & t^{u_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \ldots & t^{u_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \ldots & t^{u_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (**).

Věta 5 (o rovnicích se speciální pravou stranou). *Uvažujme rovnici*

$$(*)\qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a

$$f(t) = e^{\mu t}\cdot\left(P(t)\cos\nu t + Q(t)\sin\nu t\right),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ a P, Q jsou polynomy. Potom platí:

(i) Jestliže číslo $\mu + i\nu$ není kořenem charakteristického polynomu, pak existuje řešení rovnice (*) tvaru

$$y_0(t) = e^{\mu t}\cdot\left(R(t)\cos\nu t + S(t)\sin\nu t\right),$$

kde R, S jsou polynomy, jejichž stupně jsou nejvýše rovny většímu ze stupňů polynomů P, Q.

(ii) Jestliže číslo $\mu + i\nu$ je kořenem charakteristického polynomu a má násobnost m, pak existuje řešení rovnice (*) tvaru

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t}\cdot\left(R(t)\cos\nu t + S(t)\sin\nu t\right),$$

kde R, S jsou polynomy, jejichž stupně jsou nejvýše rovny většímu ze stupňů polynomů P, Q.