Komentář k oddílu XIV.2: Autonomní diferenciální rovnice

Obecné poznámky k autonomním rovnicím a jejich významu:

- Autonomní rovnice jsou rovnice tvaru

  $$y' = g(y),$$

  kde g je reálná funkce spojitá na svém definičním oboru. Jde tedy o speciální případ rovnic se separovanými proměnnými z předchozího oddílu – funkce h je konstantní funkce rovna 1.

  Autonomní rovnice se vyznačují tím, že se v nich nevyskytuje samostatně proměnná x (která obvykle označuje čas).

  Modelují tedy takové procesy, jejichž vývoj závisí pouze na okamžitém stavu, nikoli přímo na čase. Pokud rovnice popisuje časový vývoj veličiny y, pak říká, že rychlost změny v čase x (tj. $y'(x)$) se rovná $g(y(x))$, tj. závisí pouze na hodnotě y v čase x.

- Důsledkem těchto vlastností je následující pozorování:

  Je-li funkce y řešením autonomní rovnice na intervalu (a, b) a $c \in \mathbf{R}$, pak funkce $\widetilde{y}(x) = y(x + c)$ je řešením téže rovnice na intervalu $(a - c, b - c)$.

  Důkaz: Je zřejmé, že funkce $\widetilde{y}$ je definována na intervalu $(a - c, b - c)$. Navíc pro každé $x \in (a - c, b - c)$ platí

  $$\widetilde{y}'(x) = y'(x + c) \cdot 1 = g(y(x + c)) = g(\widetilde{y}(x)).$$

  První rovnost plyne z definice $\widetilde{y}$ a z věty o derivaci složené funkce. Druhá rovnost plyne z toho, že funkce y je řešením rovnice na intervalu (a, b) a $x + c \in (a, b)$. Třetí rovnost plyne opět z definice $\widetilde{y}$.

- Věta XIV.1 a její důkaz:

  Rozvinutím úvah z předchozích dvou bodů lze dokázat, že každé řešení autonomní rovnice je monotónní – tj. neklesající nebo nerostoucí.

  Dokažme to tedy. Nechť y je řešení výše uvedené rovnice definované na otevřeném intervalu I. Protože y je řešením diferenciální rovnice, má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci. Díky větě o vztahu monotonie a znaménka derivace stačí dokázat, že buď $y'(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$ nebo $y'(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$.

To dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují dva body $a, b \in I$, pro které platí $y'(a) > 0$ a $y'(b) < 0$.

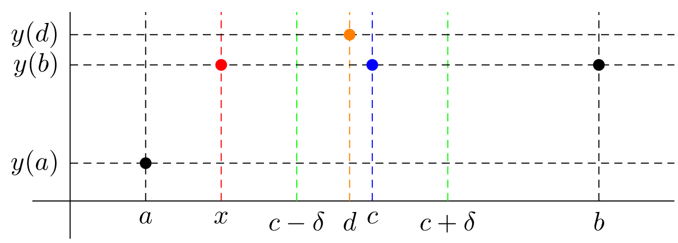
Pak zřejmě $a \neq b$. Navíc platí $y(a) \neq y(b)$. To proto, že y je řešením rovnice, a tedy

$$y'(a) = g(y(a)) \quad \text{a} \quad y'(b) = g(y(b)).$$

Kdyby totiž $y(a) = y(b)$, pak by platilo i $g(y(a)) = g(y(b))$, a tedy $y'(a) = y'(b)$. To je ovšem spor s tím, že jedna z hodnot je kladná a druhá záporná.

Máme tedy $a \neq b$ a $y(a) \neq y(b)$. Tedy $a < b$ nebo $a > b$ a také $y(a) < y(b)$ nebo $y(a) > y(b)$. To jsou celkem čtyři možnosti.

Proberme nejprve jednu z nich - předpokládejme, že $a < b$ a $y(a) < y(b)$. Ilustrujeme situaci i na obrázku.



Definujme

$$c = \inf\{x \in I \colon x > a \text{ a } y(x) = y(b)\}.$$

Množina na pravé straně je neprázdná (obsahuje b) a zdola omezená (číslem a), proto infimum existuje. Navíc ze spojitosti funkce y snadno plyne, že $y(c) = y(b)$, speciálně $c \in (a, b\rangle$.

Pak

$$y'(c) = g(y(c)) = g(y(b)) = y'(b) < 0.$$

Proto existuje $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (c - \delta, c) : y(x) > y(c) \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, c + \delta) : y(x) < y(c).$$

Zvolme $d \in (c - \delta, c)$ libovolné. Pak $y(d) > y(c) = y(b) > y(a)$.

Tedy z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot plyne, že existuje $x \in (a, d)$, pro kterou platí $y(x) = y(b)$. Protože $x < c$, je to spor s volbou c jakožto infima.

Zbylé tři případy se dokážou analogicky s patřičnými úpravami. Pokud $a < b$ a $y(a) > y(b)$, pak definujeme

$$c = \sup\{x \in I \colon x < b \text{ a } y(x) = y(a)\}.$$

Pak $c \in \langle a, b)$, $y(c) = y(a)$ a $y'(c) = y'(a) > 0$.

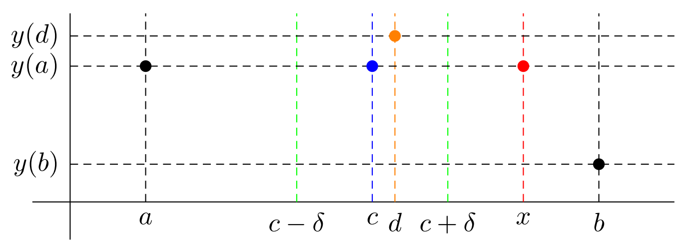
Proto existuje $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (c - \delta, c) : y(x) < y(c) \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, c + \delta) : y(x) > y(c).$$

Zvolme $d \in (c, c + \delta)$ libovolné. Pak $y(d) > y(c) = y(a) > y(b)$.

Tedy z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot plyne, že existuje $x \in (d, b)$, pro kterou platí $y(x) = y(a)$. Protože $x > c$, je to spor s volbou c jakožto suprema.

Ilustruje to opět obrázek.



Dva případy, v nichž $a > b$ již zkoumat nebudememe, jsou zcela analogické.

O řešení autonomních rovnic a Větičce XIV.2:

- Jak jsme poznamenali výše, autonomní rovnice jsou speciálním případem rovnic se separovanými proměnnými. Proto pro jejich řešení lze použít tutéž metodu.

  Protože funkce h je konstantně rovna jedné, je postup v tomto případě jednodušší. Projděme si ho:

Krok 1: V tomto kroku máme jediný interval, a to $\mathbf{R}$.

Krok 2: Stacionární řešení budou definována na $\mathbf{R}$.

Krok 3: Určíme maximální otevřené intervaly, na nichž je funkce g spojitá a nenulová.

Krok 4: Vezmeme interval J z třetího kroku a hledáme řešení s hodnotami v intervalu J. Opět G buď primitivní funkce k $\frac{1}{g}$. Pak pro taková řešení platí

$$\exists c \in \mathbf{R} : G(y(x)) = x + c.$$

Krok 5: Máme interval J jako ve čtvrtém kroku a konstantu c. Spočteme $G(J)$, obraz intervalu J při funkci G. To je otevřený interval. Pokud $G(J) = (\alpha, \beta)$, pak dostaneme řešení

$$y(x) = G^{-1}(x + c), \quad x \in (\alpha - c, \beta - c).$$

Krok 6: Nalepujeme, pokud je to třeba.

- Větička XIV.2 a její důkaz:

  Podrobnější analýzou pátého kroku dostaneme důkaz Větičky 2. Předpokládejme, že $J = (a, b)$. Funkce g je na (a, b) spojitá a nenulová, tedy buď kladná nebo záporná.

  Předpokládejme, že g je kladná na (a, b). Pak i $\frac{1}{g}$ je kladná, a tedy její primitivní funkce G je rostoucí. Proto $G((a, b)) = (\alpha, \beta)$, kde

  $$\alpha = \lim_{t \to a+} G(t) \quad \text{a} \quad \beta = \lim_{t \to b-} G(t).$$

  Jednotlivé body Větičky XIV.2 charakterizují situace, kdy tyto limity jsou vlastní či nevlastní pomocí konvergence zobecněného Riemannova integrálu.

  Zvolme libovolné $c \in (a, b)$. Potom pro zobecněný Riemannův integrál platí

  $$\int_a^c \frac{1}{g} = [G]_a^c = G(c) - \lim_{t \to a+} G(t) = G(c) - \alpha,$$

  tedy

  $$\alpha \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \int_a^c \frac{1}{g} \text{ konverguje}$$

  a

  $$\alpha = -\infty \Leftrightarrow \int_a^c \frac{1}{g} \text{ diverguje.}$$

  Podobně

  $$\int_c^b \frac{1}{g} = [G]_c^b = \lim_{t \to b-} G(t) - G(c) = \beta - G(c),$$

tedy

$$\beta \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \int_c^b \frac{1}{g} \text{ konverguje}$$

a

$$\beta = +\infty \Leftrightarrow \int_c^b \frac{1}{g} \text{ diverguje.}$$

Pokud si uvědomíme, že řešení z pátého kroku jsou definovány na intervalech tvaru $(\alpha - c, \beta - c)$, z uvedených výpočtů plyne důkaz Větičky XIV.2.

- Pokud je funkce g na intervalu (a, b) záporná, je situace analogická, ale vyžaduje modifikaci. I funkce $\frac{1}{g}$ je pak záporná, a tedy primitivní funkce G je klesající.

  Proto v tomto případě platí $G((a, b)) = (\alpha, \beta)$, kde

  $$\alpha = \lim_{t \to b-} G(t) \quad \text{a} \quad \beta = \lim_{t \to a+} G(t).$$

  Analogicky jako v kladném případě se dokáže modifikovaná Větička XIV.2. Modifikace spočívá v tom, že v bodě (b) jsou řešení definovaná na intervalech tvaru $(T, +\infty)$ a v bodě (c) na intervalech tvaru $(-\infty, T)$.

- Pokud g je kladná na (a, b) a nastane případ (a) nebo (b) a navíc $g(b) = 0$ (tj. b je stacionární řešení), pak lze řešení y prodloužit doprava stacionárním řešením b.

  Připomeňme totiž, že řešení y má tvar

  $$y(x) = G^{-1}(x + c), \quad x \in (\alpha - c, \beta - c).$$

  Za našich předpokladů je $\beta \in \mathbf{R}$, tedy i $\beta - c \in \mathbf{R}$. Navíc

  $$\lim_{x \to \beta - c -} y(x) = \lim_{x \to \beta - c -} G^{-1}(x + c) = \lim_{x \to \beta -} G^{-1}(x) = b.$$

  Druhá rovnost plyne z věty o limitě složené funkce (s podmínkou (P), vnitřní funkce je rostoucí). Třetí rovnost plyne z toho, že G je spojitá a rostoucí na intervalu (a, b), a tedy G^{-1} je spojitá a rostoucí na intervalu $G((a, b)) = (\alpha, \beta)$ (a $G^{-1}((\alpha, \beta)) = (a, b)$.

  Proto jsou splněny podmínky pro nalepování.

- Pokud g je kladná na (a, b) a nastane případ (a) nebo (c) a navíc $g(a) = 0$ (tj. a je stacionární řešení), pak lze řešení y prodloužit doleva stacionárním řešením a.

  Zcela stejně jako v předchozím bodě se totiž ověří, že $\alpha \in \mathbf{R}$, a spočítá

$$\lim_{x \to \alpha - c+} y(x) = a.$$

- Pokud g je záporná, funguje nalepování podobně, jen „na druhou stranu“.

  Pokud nastane případ (a) nebo (b) a navíc $g(b) = 0$, lze řešení prodloužit doleva stacionárním řešením b.

  Pokud nastane případ (a) nebo (c) a navíc $g(a) = 0$, lze řešení prodloužit doprava stacionárním řešením a.

Ke konvergenci zobecněného Riemannova integrálu:

- Abychom mohli aplikovat Větičku XIV.2, potřebujeme nějaké metody vyšetřování konvergence zobecněného Riemannova integrálu.

  K tomu existuje matematická teorie v určitých rysech připomínající teorii konvergence nekonečných řad.

  Nebudeme budovat celou teorii, ale zformulujeme a dokážeme několik výsledků, které se budou hodit při vyšetřování několika typů autonomních rovnic.

- Věta XIV.3 a její důkaz:

  Tato věta se zabývá situací, kdy funkce g je spojitá a kladná na intervalu $\langle a, b)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, a dává určitá kritéria pro konvergenci zobecněného Riemannova integrálu $\int_a^b \frac{1}{g}$. Protože funkce $\frac{1}{g}$ je spojitá a kladná na $\langle a, b)$, záleží na chování funkce $\frac{1}{g}$ v levém prstencovém okolí bodu b.

  Probereme jednotlivé body:

  (1) Předpokládejme, že funkce g má v bodě b zleva nenulovou limitu. Pak funkce $\frac{1}{g}$ má v bodě b zleva vlastní limitu, speciálně je omezená na intervalu $\langle a, b)$. To znamená, že existuje $c > 0$ splňující

$$\forall x \in \langle a, b) \colon 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq c.$$

Proto

$$0 \leq \int_a^b \frac{1}{g} \leq \int_a^b c = c(b-a),$$

proto $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.

(Používáme fakt, že spojitá nezáporná funkce na otevřeném intervalu má zobecněný Riemannův integrál. To plyne snadno z toho, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Riemannův integrál, s použitím definice zobecněného Riemannova integrálu a věty o limitě monotónní funkce. Viz též Cvičení 4 z doplňujících cvičení k oddílům VIII.3 a VIII.5.)

(2) Pokud $\alpha < 1$, pak zobecněný Riemannův integrál $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje. Tedy i integrál $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ konverguje.

Pokud existuje nenulová limita $L = \lim_{x \to b-} \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$, pak

$$\lim_{x \to b-} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{(b-x)^\alpha}} = \lim_{x \to b-} \frac{(b-x)^\alpha}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

je vlastní.

Proto je funkce $\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{(b-x)^\alpha}}$ omezená na intervalu $\langle a, b)$. Tj. existuje $c > 0$ splňující

$$\forall x \in \langle a, b)\colon 0 \leq \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{(b-x)^\alpha}} \leq c,$$

neboli

$$\forall x \in \langle a, b)\colon 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq c \cdot \frac{1}{(b-x)^\alpha}.$$

Tedy

$$0 \leq \int_a^b \frac{1}{g} \leq c \cdot \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx.$$

Protože integrál napravo konverguje, konverguje i $\int_a^b \frac{1}{g}$.

(3) Předpokládejme, že $g(b) = 0$ a $g'_-(b)$ existuje vlastní. Protože

$$g'_-(b) = \lim_{x \to b-} \frac{g(x) - \boxed{g(b)}^{\,=0}}{x - b} = \lim_{x \to b-} \frac{g(x)}{x-b},$$

znamená předpoklad, že existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to b-} \frac{g(x)}{x-b}.$$

Funkce $\frac{g(x)}{x-b}$ je spojitá a záporná na $\langle a, b)$. Protože má vlastní limitu, je také omezená na $\langle a, b)$. Tedy existuje $c > 0$ splňující

$$\forall x \in \langle a, b)\colon 0 \le \frac{g(x)}{b-x} \le c,$$

po úpravě

$$\forall x \in \langle a, b)\colon 0 \le \frac{1}{b-x} \le \frac{c}{g(x)}.$$

Tedy

$$\underbrace{\int_a^b \frac{1}{b-x}\,dx}_{=+\infty} \le \int_a^b \frac{c}{g},$$

z čehož již snadno plyne, že $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.

- Analogie Věty XIV.3 platí pro funkce spojité na a kladné na intervalu $(b, a\rangle$, kde $a, b \in \mathbf{R}$. V bodech (1) a (2) se uvažují limity v bodě b zprava, v bodě (3) se uvažuje $g'_+(b)$.
- Větu XIV.3 lze aplikovat i pro záporné funkce – je-li g záporná, je možné uvažovat místo ní kladnou funkci $-g$.
- Věta XIV.4 a její důkaz:

  Tato věta se zabývá funkcemi, které jsou spojité a kladné na intervalu $\langle a, +\infty$, kde $a \in \mathbf{R}$. Dává nějaká kritéria pro konvergenci integrálu $\int_a^\infty \frac{1}{g}$.
  Probereme oba body:

  (1) Nechť $\alpha > 1$. Pak $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje.
  Pokud existuje nenulová limita $L = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}$, pak

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

je vlastní.

Podle věty o limitě a nerovnostech existuje $k > 0$, že

$$\forall x > k : 0 \leq \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{x^\alpha}} \leq \frac{1}{L} + 1,$$

neboli

$$\forall x > k : 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq \left(\frac{1}{L} + 1\right) \frac{1}{x^\alpha}.$$

Tedy

$$0 \leq \int_k^{+\infty} \frac{1}{g} \leq \left(\frac{1}{L} + 1\right) \int_k^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Protože integrál vpravo konverguje, konverguje i $\int_k^{+\infty} \frac{1}{g}$, tedy i $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$.

(2) Nechť existuje vlastní limita

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}.$$

Podle věty o limitě a nerovnostech existuje $k > 0$, že

$$\forall x > k : 0 \leq \frac{g(x)}{x} \leq L + 1.$$

Po úpravě

$$\forall x > k 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{L+1}{g(x)},$$

tedy

$$\underbrace{\int_k^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx}_{=+\infty} \leq \int_k^{\infty} \frac{L+1}{g}.$$

Z toho je vidět, že $\int_k^{+\infty} \frac{1}{g}$ diverguje, a tedy i $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ diverguje.

- Analogie Věty XIV.4 platí pro funkce spojité na a kladné na intervalu $(-\infty, a\rangle$, kde $a, b \in \mathbf{R}$. V obou bodech se uvažují limity v $-\infty$.

- Větu XIV.4 lze aplikovat i pro záporné funkce – je-li g záporná, je možné uvažovat místo ní kladnou funkci $-g$.

K poslednímu důsledku:

- Pokud $x_0 \in \mathbf{R}$ a y_0 patří do definičního oboru funkce g, pak existuje řešení y výše uvedené rovnice, které splňuje $y(x_0) = y_0$.

  Pokud $g(y_0) = 0$, pak za y lze vzít stacionární řešení konstantně rovné y_0.

  Pokud $g(y_0) \neq 0$, pak y_0 patří do nějakého intervalu z třetího kroku. Nechť je to interval (a, b).

  Díky čtvrtému kroku víme, že řešení s hodnotami ve čtvrtém kroku splňují
  $$G(y(x)) = x + c$$
  pro nějakou konstantu $c \in \mathbf{R}$. Zvolíme-li
  $$c = G(y_0) - x_0,$$
  pak řešení tvaru
  $$y(x) = G^{-1}(x + G(y_0) - x_0)$$
  splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$.

  Toto řešení je definováno na intervalu $(\alpha - G(y_0) + x_0, \beta - G(y_0) + x_0)$, kde $(\alpha, \beta) = G((a, b))$.

  Pokud není maximální, lze ho prodloužit na maximální pomocí stacionárních řešení.

- V předchozím bodě jsme ukázali, že existuje maximální řešení splňující $y(x_0) = y_0$. Takové řešení nemusí být jediné.

  Ale z metody řešení plyne, že jediný způsob, jak může nastat nejednoznačnost, je prostřednictvním nalepování v hodnotě stacionárního řešení.

  Pokud však funkce g má v každém bodě vlastní derivaci (stačily by vlastní jednostranné derivace v nulových bodech), z Věty XIV.3(3) a z Větičky XIV.2 plyne, že nalepovat nelze.

  Podrobněji: Nechť g je kladná a spojitá na (a, b) a $g(b) = 0$. Zvolme $c \in (a, b)$.

  Protože existuje vlastní derivace $g'_-(b)$, podle Věty XIV.3(3) $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje.

Z Větičky XIV.2 pak plyne, že řešení s hodnotami v (a, b) jsou definována na shora neomezeném intervalu (a má v $+\infty$ limitu b). Proto stacionární řešení b nalepit nelze.

Zbylé případy se dokážou obdobně.