Komentář ke Kapitole XIII: Diferenciální rovnice – základní pojmy:

- Diferenciální rovnice je rovnice, v níž neznámou je nějaká funkce a v níž se vyskytují hodnoty neznámé funkce a hodnoty jejích derivací.

  Příklady diferenciálních rovnic:

  $$\begin{aligned} y'' - y' + y &= x + 1, \\ y^{(4)} \cdot y'' + y' &= 0, \\ y' - \sin y &= \cos x. \end{aligned}$$

- Přesná formulace: Diferenciální rovnice je rovnice tvaru

  $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x) = 0, \qquad (*)$$

  kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

  Pro výše uvedené příklady má funkce F tvar

  $$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 1, \\ F(x_1, \ldots, x_6) &= x_1 \cdot x_3 + x_4, \\ F(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - \sin x_2 - \cos x_3. \end{aligned}$$

- Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

  První z výše uvedených rovnic je druhého řádu, druhá je čtvrtého řádu a třetí je prvního řádu.

- Řešením diferenciální rovnice je funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu, která v každém bodě tohoto intervalu rovnici splňuje.

  Přesná formulace pro výše uvedený obecný tvar diferenciální rovnice: Řešením diferenciální rovnice $(*)$ je funkce y definovaná na nějakém otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a splňuje

  $$\forall x \in I : F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

  Řešením první z uvedených rovnic je například funkce

  $$y(x) = x + 2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ověřme to: V tomto případě platí $y'(x) = 1$ a $y''(x) = 0$, tedy

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 0 - 1 + x + 2 = x + 1.$$

Řešením druhé z uvedených rovnic je například libovolná konstatní funkce definovaná na $\mathbf{R}$.

- Řešení je, koneckonců jako každá funkce, určeno svým definičním oborem (otevřeným intervalem) a pak funkčním předpisem.

  Pokud máme řešení y definované na intervalu I, pak jeho prodloužením rozumíme řešení definované na větším intervalu (na intervalu $J \underset{\neq}{\supseteq} I$), které se na intervalu I shoduje s y (tj. které prodlužuje y).

  Důležitým případem jsou maximální řešení – ta, co nemají už žádné prodloužení.

  Například řešení, která jsou definována na celém $\mathbf{R}$ (třeba ta výše zmíněná), jsou maximální. To je zřejmé – evidentně je nelze prodloužit. Není to jediná možnost, jak uvidíme na mnoha příkladech během semestru.

- Význam diferenciálních rovnic a jednotlivých členů v nich:

  Jedním z častých použití diferenciálních rovnic je modelování časového vývoje nějaké veličiny.

  V tomto případě proměnná x označuje čas.

  Hodnota y pak označuje aktuální stav zkoumané veličiny (hodnotu veličiny v čase x).

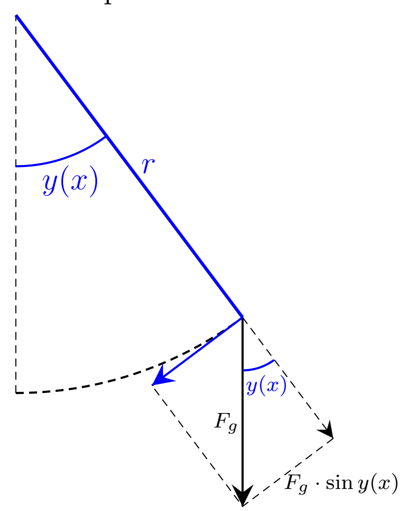
  První derivace pak zachycuje rychlost změny veličiny y (ve fyzice jde o rychlost). V tom je zahrnuto, zda veličina roste či klesá i jak rychlá tato změna je.

  Druhá derivace zachycuje rychlost změny rychlosti změny (ve fyzice se mluví o zrychlení). Například, pokud veličina roste, pak druhá derivace říká mj., zda růst zpomaluje či zrychluje.

- Několik příkladů diferenciálních rovnic modelujících nějaký proces:

  1. Pohyb kyvadla:

     Předpokládejme, že máme kyvadlo – hmotný bod zavěšený na pevném nehmotném vláknu délky r. x nechť označuje čas, $y(x)$ pak výchylku v čase x. Tření a odpor vzduchu zanedbáváme.

     Na hmotný bod působí gravitační síla $F_g = m \cdot g$ (m je hmotnost a g je gravitační zrychlení). Tato síla se rozkládá do dvou směrů – do směru pevného vlákna a do směru kolmého. Efekt má jen část síly v kolmém směru (vlákno je pevné). Ta má velikost $F_g \cdot \sin y(x) = mg \sin y(x)$. Velikost zrychlení hmotného bodu dostaneme vydělením síly hmotností, tedy $a = g \sin y(x)$. Úhlové zrychlení dostaneme vydělením r, tedy $\alpha = \frac{g}{r} \sin y(x)$. Protože úhlové zrychlení je druhou derivací výchylky, dostaneme diferenciální rovnici
     $$y'' = -\frac{g}{r} \sin y.$$
     Znaménko minus vychází z toho, jakým směrem působí kolmá složka síly.

  2. Matematické kyvadlo: Jde o zjednoušednou verzi předchozího fyzikálního modelu. Obvykle se uvádí ve tvaru
     $$y'' = -y.$$
     Zjednodušení spočívá jednak v nahrazení fyzikálních konstant jedničkou

a jednak v nahrazení členu $\sin y$ členem y (což vychází z rovnosti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tedy pro malé y je $\sin y$ přibližně rovno y).

3. Malthusiánský populační model:

   Tento model popisuje vývoj nepříliš hustých izolovaných populací (bakteriálních kultur, ale do určité míry i lidských společenství).

   Označme $y(x)$ počet jedinců v populaci v čase x. Přepokládáme, že určitá daná část jedinců (určená parametrem a) zplodí za jednotku času potomka.

   U bakterií to znamená, že daná část bakterií se za jednotku času rozdělí. U lidí by onen parametr vyjadřoval míru porodnosti.

   Přírůstek populace za malý čas t je tedy přibližně

   $$\frac{y(x+t) - y(x)}{t} \approx a \cdot y(x),$$

   což lze přibližně vyjádřit diferenciální rovnicí

   $$y' = ay.$$

4. Logistický populační model:

   Jde o přesnější verzi malthusiánského modelu, v níž se bere do úvahy zahušťování populace. Jedinci se kromě rozmnožování zabývají i konfrontací s ostatními jedinci, proto se přírůstek snižuje o hodnotu přímo úměrnou počtu střetů různých jedinců. Zachycuje to diferenciální rovnice

   $$y' = ay - by^2,$$

   kde a, b jsou kladné parametry. Parametr a má stejný význam jako v malthusiánském modelu, parametr b je obvykle výrazně menší než a a zachycuje vliv střetů různých jedinců (proto je násoben y^2 – počtem dvojic jedinců).

- Složitější modely se popisují nikoli jednou diferenciální rovnicí, ale soustavami diferenciálních rovnic. Více o soustavách diferenciálních rovnic si řekneme v kapitole XVII.

  Nyní uveďme dva modely, které používají soustavy diferenciálních rovnic.

1. Model dravec-kořist.

   Tento model vychází z biologie, popisuje vývoj populace dvou vzájemně interagujících druhů - dravce a kořisti (například lišky a zajíce).

   Označme $y(x)$ počet jedinců druhu sloužícího jako kořist v čase x a $z(x)$ počet dravců v čase x. Vývoj populací pak popisuje soustava dvou rovnic

   $$y' = ay - byz,$$
   $$z' = -cz + dyz,$$

   kde a, b, c, d jsou kladné parametry.

   Vysvětlení:

   První rovnice popisuje vývoj populace druhu sloužícího jako kořist. Člen ay zachycuje fakt, že tento druh se množí (je to týž člen jako v malthusiánském i logistickém populačním modelu), člen $-byz$ zachycuje skutečnost, že kořist je lovena dravci – úbytek je úměrný počtu setkání dravce s kořistí.

   Druhá rovnice popisuje vývoj populace dravců. Člen $-cz$ zachycuje, že dravci bez kořisti vymírají. Druhý člen dyz zachycuje vliv lovu kořisti na množení dravců.

2. SIR model šíření epidemie:

   Předpokládejme, že v populaci konstantní velikosti se šíří nějaká infekce. (Tento model popisuje šíření rychlých epidemií, zanedbává se porodnost a úmrtnost.)

   N bude značit velikost populace, S počet osob citlivých k infekci, I počet infikovaných (a tedy infekčních) a R počet uzdravených nebo zemřelých (ti se již nemohou nakazit). Vývoj pak popisuje soustava

   $$S' = -\beta \cdot \frac{SI}{N},$$
   $$I' = \beta \cdot \frac{SI}{N} - \gamma I,$$
   $$R' = \gamma I,$$

   kde β, γ jsou kladné parametry.

   Idea modelu je následující:

   Citlivá část populace se přesouvá do části infikované. Přitom změna je přímo úměrná počtu setkání citlivých a infikovaných, tedy i součinu počtu citlivých a počtu infikovaných. Toto zahrnuje člen $\beta \cdot \frac{SI}{N}$.

Dále, parametr γ je součet míry uzdravování a úmrtnosti.

Existuje řada variant tohoto modelu (například SIRD model, kde se rozlišují uzdravení a zemřelí, SIS model, kde uzdravení nezískávají imunitu a stávají se opět citlivými aj.).

- Co nás bude zajímat ohledně diferenciálních rovnic:
  - Metody řešení. Budeme se snažit najít všechna maximální řešení dané rovnice.

    Ukážeme si metody řešení různých typů diferenciálních rovnic.
  - Existence a jednoznačnost řešení: U mnoha rovnic nebudeme umět najít explicitní tvar řešení. Proto se zkoumá existence a jednoznačnost řešení. Vědět, zda řešení existuje a nakolik je jednoznačné, je důležité jednak při použití numerických metod a jednak lze pak zkoumat vlastnosti řešení i bez znalosti explicitního vzorce.
  - Kvalitativní vlastnosti řešení: Někdy sice nebudeme znát vzorec pro řešení, ale bude možné zkoumat některé vlastnosti řešení (monotonie, limitní chování atp.).